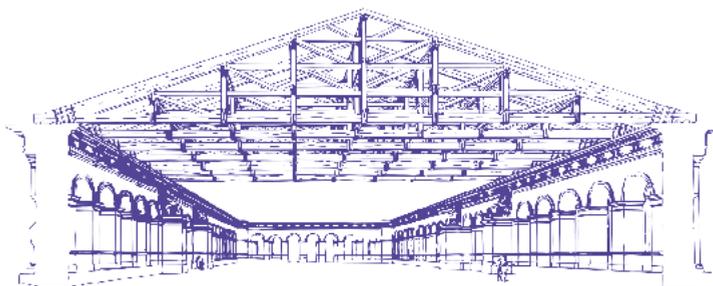


Filippo Cucco

LEZIONI DI STATICA

**CONCETTI DI BASE
ALLA MECCANICA DELLE STRUTTURE**

SECONDA EDIZIONE



SOFTWARE INCLUSO

STRUTTURE INTELAIATE PIANE E GEOMETRIA DELLE MASSE

F.A.Q. (domande e risposte sui principali argomenti)



GRAFILL

INDICE

1.0. RICHIAMI DI ALGEBRA DELLE MATRICI	p.	1
1.1. Matrici rettangolari.....	"	1
1.2. Matrici quadrate	"	2
1.2.1. Determinante	"	2
1.2.2. Complemento algebrico.....	"	3
1.3. Algebra delle matrici.....	"	3
1.3.1. Trasposta di una matrice.....	"	4
1.3.2. Matrice unità e matrice nulla.....	"	4
1.3.3. Somma di matrici	"	5
1.3.4. Differenza di matrici.....	"	5
1.3.5. Prodotto di matrici.....	"	5
1.3.6. Divisione di matrici	"	6
1.3.7. Esercizi da svolgere.....	"	9
1.4. Sistemi lineari di equazioni.....	"	10
1.4.1. Soluzione di un sistema determinato.....	"	10
1.4.2. Sistemi impossibili	"	12
1.4.3. Sistemi indeterminati.....	"	13
1.4.4. Sistemi "travestiti".....	"	14
1.4.5. Uso delle matrici nella soluzione dei sistemi di equazioni lineari.....	"	16
2.0. STABILITÀ E RESISTENZA	"	19
3.0. ELEMENTI DI TEORIA DEI VETTORI	"	23
3.1. Somma grafica.....	"	26
3.2. Somma analitica	"	26
3.3. Prodotto scalare.....	"	27
3.4. Tipi di vettori.....	"	28
3.5. Somma di cursori	"	29
3.6. Somma di vettori applicati	"	29
3.7. Proprietà dei poligoni funicolari	"	30
3.8. Momento di una forza	"	30
3.9. La coppia.....	"	33
3.10. Principio di equivalenza e di riducibilità.....	"	34
4.0. RICHIAMI DI MECCANICA	"	35
4.1. Condizioni cinematiche e meccaniche di quiete	"	37
5.0. I VINCOLI	"	39
5.1. I vincoli nel piano (classificazione cinematica)	"	39
5.1.1. I vincoli semplici.....	"	39
5.1.1.1. Il carrello	"	40
5.1.1.2. La biella.....	"	40
5.1.1.3. Il quadripendolo	"	41

5.1.2.	I vincoli doppi.....	p.	42
5.1.2.1.	La cerniera fissa.....	"	42
5.1.2.2.	L'incastro scorrevole	"	42
5.1.3.	I vincoli tripli.....	"	43
5.1.3.1.	L'incastro perfetto	"	43
5.2.	I vincoli nello spazio (classificazione cinematica).....	"	44
5.3.	I vincoli nel piano (classificazione meccanica).....	"	45
5.3.1.	Vincoli diffusi e vincoli puntiformi	"	45
5.3.2.	Reazioni del carrello, della biella e del quadripendolo	"	45
5.3.3.	Reazioni della cerniera, dell'incastro scorrevole e perfetto "	"	46
6.0.	CALCOLO DELLE REAZIONI DEI VINCOLI.....	"	47
6.1.	Classificazione dei corpi vincolati.....	"	47
6.2.	Calcolo delle forze reattive in una trave isostatica.....	"	49
6.3.	Calcolo delle forze reattive in una trave ipostatica	"	51
6.4.	Calcolo delle forze reattive in una trave iperstatica	"	53
6.5.	Calcolo delle forze reattive in una trave ipercinestatica	"	54
6.6.	Algoritmo per il calcolo delle reazioni.....	"	55
6.7.	Sistemi di travi	"	57
6.8.	Forze distribuite e forze concentrate	"	58
6.9.	Complessità di natura geometrica	"	59
6.9.1.	I teoremi sui triangoli rettangoli della trigonometria	"	60
6.9.2.	Teorema dei lati paralleli o ortogonali.....	"	62
6.10.	Soluzione di esempi complessi	"	63
6.10.1.	Esempio 1.6.....	"	63
6.10.2.	Esempio 2.6.....	"	65
6.11.	Il Principio dei Lavori Virtuali	"	67
6.11.1.	Gradi di libertà e Parametri di Lagrange	"	70
6.11.2.	Rotazioni infinitesime: semplificazioni	"	72
6.11.3.	Il Teorema di Eulero per i moti rigidi e infinitesimi nel piano	"	72
6.11.4.	Componente di spostamento a causa di una rotazione rigida	"	73
6.11.5.	Equazioni di equilibrio in forma matriciale scritte tramite il P.LL.VV.....	"	77
7.0.	I VINCOLI INTERNI	"	83
7.1.	Classificazione cinematica dei vincoli interni	"	84
7.2.	Classificazione meccanica dei vincoli interni	"	85
7.3.	Vincoli interni anomali.....	"	86
7.3.1.	La cerniera interna multipla.....	"	86
7.3.2.	L'incastro interno come vincolo di continuità.....	"	87
8.0.	CALCOLO DELLE REAZIONI DEI VINCOLI ESTERNI ED EQUAZIONI PER I MOTI RELATIVI	"	89
8.1.	Algoritmo generale per il calcolo delle reazioni dei vincoli esterni ..	"	95
8.2.	Esempio 1.8.....	"	96

8.3.	Esempio 2.8.....	p.	100
8.4.	Esempio 3.8.....	"	106
8.5.	Esempio 4.8.....	"	107
8.6.	Particolari disposizioni dei vincoli che danno inefficacia.....	"	111
9.0.	REAZIONI DEI VINCOLI INTERNI	"	113
10.0.	RICHIAMI DI ANALISI E DI GEOMETRIA ANALITICA	"	125
10.1.	Derivata prima di una funzione.....	"	125
10.1.1.	Derivata prima come limite del rapporto incrementale.....	"	126
10.2.	Punti di stazionarietà di una funzione	"	127
10.3.	L'integrale indefinito	"	128
10.4.	L'integrale definito	"	130
11.0.	DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITA- ZIONE IN TRAVI SEMPLICI.....	"	131
11.1.	Disegno dei diagrammi senza l'ausilio diretto delle funzioni.....	"	140
11.1.1.	Trave a mensola con carico concentrato all'estremità.....	"	140
11.1.2.	Trave a mensola con coppia concentrata all'estremità.....	"	141
11.1.3.	Trave a mensola con carico uniforme.....	"	142
11.1.4.	Trave a mensola con carico triangolare.....	"	144
11.1.5.	Trave a mensola con carico triangolare specchiato.....	"	145
11.1.6.	Trave a mensola con carico trapezio	"	147
11.1.7.	Trave a mensola con carico trapezio specchiato.....	"	149
11.1.8.	Trave a mensola con carico parabolico	"	151
11.1.9.	Vincoli interni singolari, un aiuto nel disegno dei diagrammi.....	"	152
11.1.10.	Trave con cerniere interne	"	155
11.1.11.	Trave con bipendolo interno.....	"	157
11.1.12.	Legame tra deformata e momento flettente.....	"	159
12.0.	DIAGRAMMI IN STRUTTURE COMPLESSE	"	161
12.1.	Regole di raccordo	"	165
12.1.1.	Forze concentrate.....	"	166
12.1.2.	Coppie concentrate	"	168
12.1.3.	Esempio 1.12	"	171
12.1.4.	Esempio 2.12	"	173
12.1.5.	Esempio 3.12	"	174
12.1.6.	Esempio 4.12	"	176
12.1.7.	Equazioni di equilibrio dei nodi	"	177
12.1.8.	Esempio 5.12	"	179
12.2.	Sistemi moltiplicemente connessi	"	182
12.2.1.	Calcolo delle condizioni di vincolo.....	"	183
12.2.2.	Trasformazione di un sistema pluriconnesso.....	"	184
13.0.	LE TRAVATURE RETICOLARI	"	189
13.1.	Equazioni di equilibrio dei nodi.....	"	190

14.0. LA REAZIONE DIFFUSA DEL VINCOLO DI CONTINUITÀ: LE TENSIONI	p.	197
14.1. Relazione tra componenti di tensione e caratteristiche della sollecitazione	"	199
15.0. LA GEOMETRIA DELLE MASSE	"	203
15.1. Momento statico.....	"	204
15.1.2. Il baricentro di una figura	"	207
15.1.3. Il Teorema di Varignon.....	"	207
15.1.4. Coordinate del baricentro	"	209
15.1.5. Il Teorema di trasposizione.....	"	212
15.2. Momento d'inerzia assiale	"	213
15.2.1. Il Teorema di trasposizione.....	"	217
15.2.2. Gli assi principali d'inerzia ed i momenti d'inerzia principali	"	220
15.2.3. Un surrogato del Teorema di Varignon.....	"	220
15.2.4. Il baricentro dei momenti statici.....	"	221
15.3. Polarità tra rette e baricentri dei momenti statici	"	223
15.3.1. L'ellisse centrale d'inerzia.....	"	225
15.3.2. Usare l'ellisse centrale d'inerzia	"	230
15.3.2.1. Data l'ellisse e la retta trovare il baricentro dei momenti statici	"	230
15.3.2.2. Data l'ellisse e il baricentro dei momenti statici trovare la retta corrispondente.....	"	231
15.3.3. Il nocciolo centrale d'inerzia	"	232
15.4. Momento d'inerzia polare.....	"	238
15.4.1. Momento d'inerzia polare come somma di due momenti d'inerzia assiali.....	"	240
15.5. Momento d'inerzia centrifugo.....	"	243
15.5.1. Il Teorema di Trasposizione	"	247
15.6. Rotazione del sistema di riferimento.....	"	249
15.6.1. Calcolo della retta coniugata di una retta generica assegnata	"	254
16.0. LEGGI COSTITUTIVE	"	257
16.1. Comportamento elastico.....	"	258
16.1.1. Comportamento elastico lineare	"	258
16.1.2. Comportamento elastico non lineare	"	259
16.2. Comportamento plastico	"	259
16.3. La Legge di Hooke.....	"	260
16.3.1. Prova a trazione e compressione	"	260
16.3.1.1. Prova a trazione e compressione nei materiali duttili	"	261
16.3.1.2. Prova a trazione e compressione nei materiali fragili	"	264
16.3.1.3. Prova a taglio.....	"	265
16.3.1.4. La legge di Hooke generalizzata	"	268

17.0. TEORIA DELLA TRAVE	p. 273
17.1. Lo Sforzo Normale Semplice.....	" 275
17.1.2. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 275
17.1.3. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 276
17.1.4. Legge di variazione della reazione distribuita.....	" 277
17.2. La Flessione Semplice.....	" 279
17.2.1. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 279
17.2.2. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 281
17.2.3. Legge di variazione della reazione distribuita.....	" 281
17.2.4. Equazioni di equilibrio e calcolo delle σ	" 281
17.2.5. Strutture resistenti per forma.....	" 285
17.2.6. Flessione retta e flessione deviata.....	" 287
17.2.7. Flessione deviata come somma di due flessioni rette.....	" 287
17.3. La Torsione semplice.....	" 289
17.3.1. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 289
17.3.2. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 291
17.3.3. Legge di variazione della reazione distribuita.....	" 291
17.3.4. Equazioni di equilibrio e calcolo delle τ	" 292
17.3.5. Sezioni di uso frequente:sezione rettangolare.....	" 294
17.3.6. Sezioni di uso frequente:sezione composta da rettangoli....	" 294
17.4.6. Le sezioni cave a parete sottile: la teoria di Bredt.....	" 296
17.4. Il Taglio.....	" 299
17.4.1. Legge di variazione delle tensioni al variare della corda....	" 304
17.4.1.1. Sezione rettangolare.....	" 304
17.4.1.2. Sezioni composte da rettangoli.....	" 305
17.4.1.3. Sezione triangolare.....	" 307
17.5. Sforzo normale e flessione.....	" 309
17.5.1. Sforzo Normale e Flessione come Sforzo Normale Eccentrico.....	" 310
17.5.2. Approccio diretto.....	" 310
17.5.2.1. Equazioni di compatibilità, l'ipotesi di Navier.....	" 310
17.5.2.2. Equazione costitutiva, legge di Hooke.....	" 312
17.5.2.3. Legge di variazione della reazione distribuita....	" 312
17.5.2.4. Equazioni di equilibrio e calcolo delle σ	" 313
17.5.2.5. Sforzo normale eccentrico (S.N.E.) retto e deviato.....	" 321
17.5.2.5.1. S.N.E. deviato come somma di uno Sforzo Normale semplice e due flessioni rette.....	" 321
18.0. STATO DI TENSIONE NEL PUNTO E VERIFICHE DI RESISTENZA	" 325
18.1. Cerchio di Mohr.....	" 331
18.2. Verifiche di resistenza.....	" 335
19.0. VERIFICHE DI RESISTENZA: APPLICAZIONI NUMERICHE	" 341
19.1. Esempio 1.19.....	" 341
19.2. Esempio 2.19.....	" 344

19.3.	Esempio 3.19.....	p.	349
19.4.	Esempio 4.19.....	"	352
19.5.	Esempio 5.19.....	"	353
A.0.	APPENDICE A: PROGRAMMA TELAI PIANI.....	"	371
A.1.	L'ambiente grafico di lavoro	"	371
A.2.	Impostazione delle fasi di lavoro	"	373
A.2.1.	Generazione dello schema strutturale.....	"	374
A.3.	Inserimento o modifica per elemento singolo	"	376
A.3.1.	Inserimento/modifica dati dei nodi.....	"	377
A.3.2.	Inserimento/modifica dati delle travi.....	"	377
A.3.2.1.	Prima pagina tabella dati	"	377
A.3.2.2.	Seconda pagina tabella dati	"	378
A.4.	Inserimento/modifica dati tramite menù contestuale o copia e incolla... ..	"	379
A.5.	Inserimento o modifica veloce	"	380
A.6.	Bottoni di generazione grafica.....	"	381
A.7.	Bottoni di visualizzazione	"	385
A.8.	Bottoni di verifica.....	"	388
A.9.	I menù a discesa	"	390
A.10.	Esempio numerico.....	"	392
B.0.	APPENDICE B: PROGRAMMA GEOMETRIA DELLE MASSE.....	"	399
B.1.	Generazione del contorno della sezione.....	"	399
B.2.	Inserimento dei vertici di uno o più poligoni	"	400
B.3.	Inserimento rettangoli a lati paralleli alla griglia	"	401
B.4.	Inserimento rettangoli inclinati	"	401
B.5.	Creazione di poligoni regolari ed archi pieni	"	401
B.6.	Modifica del contorno della figura composta da uno o più poligoni.	"	403
B.6.1.	Traslazione.....	"	403
B.6.2.	Rotazione della sezione	"	404
B.6.3.	Spostamento dei vertici della sezione.....	"	404
B.6.4.	Assegnazione diretta dell'inclinazione relativa tra due dei lati di un poligono.....	"	405
B.7.	Allineamento dei vari poligoni.....	"	406
B.7.1.	Allineamento in orizzontale e verticale.....	"	406
B.7.1.1.	Allineamento in verticale ed orizzontale secondo la direzione fissata del lato contiguo	"	406
B.7.1.2.	Allineamento in verticale ed orizzontale di un poligono rispetto ad un vertice	"	407
B.8.	Eliminazione dei vertici	"	407
B.9.	Aggiunta di nuovi vertici.....	"	407
B.10.	Distanza tra due punti.....	"	408
B.11.	Inserimento di vertici ausiliari.....	"	408
B.12.	Fusione di 2 poligoni.....	"	409
B.13.	Punti di intersezione di 2 poligoni.....	"	409
B.14.	Nodi all'intersezione di due lati	"	409
B.15.	Separazione di un poligono in 2 poligoni.....	"	410

B.16. Taglio di un poligono	p.	410
B.17. Creazione di poligoni cavi a spessore costante	"	410
B.18. Creazione di fori	"	410
B.19. Creazione e gestione di un archivio di sezioni	"	411
B.20. Calcolo delle caratteristiche geometriche	"	411
B.21. Calcolo del momento d'inerzia rispetto ad una retta qualunque	"	412
B.22. Menù a discesa	"	412
INSTALLAZIONE DEL SOFTWARE ALLEGATO	"	415
Introduzione	"	415
Requisiti minimi hardware e software	"	415
Download del software e richiesta della password di attivazione	"	415
Installazione e attivazione del software	"	416
LICENZA D'USO	"	421
DOWNLOAD DEL SOFTWARE E RICHIESTA DELLA PASSWORD DI ATTIVAZIONE	"	422

12.0 DIAGRAMMI IN STRUTTURE COMPLESSE

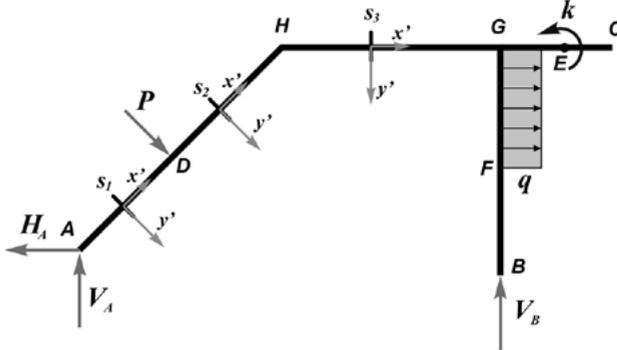


Fig. 1.12

Nei capitoli precedenti si è visto come è possibile catturare, all'interno di particolari funzioni $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$, tutte le reazioni dei vincoli interni di una trave. Queste funzioni sono state ottenute semplicemente calcolando le reazioni in corrispondenza di un vincolo interno cosiddetto *generico*, cioè posto a una distanza variabile x da uno dei due estremi della trave stessa. Se si ha a che fare con una struttura geometricamente complessa, formata dall'assemblaggio di più travi, e se le condizioni di carico sono le più svariate, è sempre possibile esprimere il tutto tramite tre sole funzioni calcolate in un'unica sezione generica? Ovviamente no, le funzioni saranno diverse di zona in zona, esse muteranno al variare delle forze applicate e al variare dell'orientamento del vincolo interno. Un semplice esempio chiarirà il concetto. Si consideri la struttura di Fig. 1.12. La sezione s_1 suddivide le forze in due gruppi: H_A, V_A da una parte, P, q, k, V_B dall'altra. La stessa cosa avviene per qualunque sezione presa all'interno del tratto AD . La sezione s_2 , pur avendo lo stesso orientamento degli assi locali della s_1 , tuttavia suddivide le forze in modo diverso: H_A, V_A e P da una parte, q, k e V_B dall'altra. La sezione s_3 , pur operando nella medesima suddivisione di forze della s_2 ha un orientamento diverso degli assi locali. Ne consegue che le funzioni $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$ sono diverse all'interno dei tratti AD , DH e HG .

Esistono delle regole che consentono di individuare in una qualunque struttura quei tratti all'interno dei quali la legge di variazione delle caratteristiche della sollecitazione è diversa? E' possibile sapere a priori quante sezioni generiche effettuare e dove? La risposta è senz'altro affermativa. Adesso impareremo proprio dove posizionare le lettere di identificazione che individuano i vari tratti, cioè punti di passaggio da una funzione ad un'altra.

Le lettere di identificazione vanno poste:

- In corrispondenza dei vincoli esterni (A e B).
- In corrispondenza di estremi liberi (C).
- In corrispondenze dei punti di applicazione di forze e coppie concentrate (D,E).
- In corrispondenza del punto iniziale e finale del diagramma di un carico distribuito (F,G)
- In corrispondenza dei nodi (punti di intersezione di aste con diversa direzione) (G,H).

L'eventuale presenza di vincoli interni non ha alcun effetto sul cambiamento delle caratteristiche della sollecitazione, per cui in corrispondenza di essi non vanno mai poste lettere di identificazione, oltretutto perchè ciò, pur non essendo un errore, complicherebbe inutilmente il lavoro aumentando in modo inappropriato il numero di funzioni da trattare.

Si trovino le funzioni $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$ nella struttura di Fig. 2.12, supponendo che tutte le forze siano note ed in equilibrio (sono già state calcolate le reazioni dei vincoli esterni).

Occorre innanzitutto inserire le lettere di delimitazione dei tratti all'interno dei quali definire le varie funzioni. Abbiamo i vincoli esterni in A e B (nel sistema svincolato potrebbero anche intendersi come punti su cui agiscono forze e coppie concentrate o come estremi liberi); abbiamo estremi liberi in C e D ; forze e coppie concentrate in E ed F . Poi si hanno carichi distribuiti con inizio e fine in G ed H , in I e D . Infine si hanno dei nodi in L , M ed I .

Fig. 2.12

Nel sistema di Fig. 2.12 si hanno complessivamente 10 tratti, per ciascuno di essi occorrerà definire le tre funzioni $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$: funzioni che possiamo inserire all'interno di una matrice colonna di nome Q_{ij} , dove i due indici stanno ad indicare le lettere che delimitano il tratto in esame (AG , GH , HL etc.)

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix}; \quad (1.12)$$

Per esplicitare le varie funzioni si operi sempre come segue.

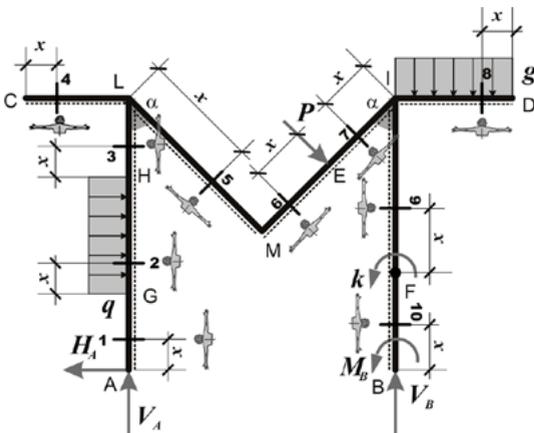


Fig. 3.12

del tratto medesimo (Fig.3.12).

Si tracci una linea tratteggiata qualunque parallela all'asse della struttura: questa linea definisce ciò che è sotto o sopra, a destra e a sinistra rispetto all'osservatore che guarda la sezione generica con le braccia aperte o nelle altre pose definite in precedenza. L'osservatore si deve sempre disporre in modo tale da vedere sempre la linea tratteggiata al di sotto della linea d'asse della struttura.

Si evidenzi una sezione n qualunque (meglio se decentrata) all'interno di ciascun tratto e si indichi con x la sua distanza da uno dei due estremi

Tratto AG: la sezione 1 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze V_A ed H_A (è indicato soltanto l'omino con le braccia aperte per questioni di spa-

zio), mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le restanti forze: q, g, P, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di sinistra (è il più conveniente in quanto su di esso agisce il minor numero di forze e/o momenti) avremo:

$$\underline{Q}_{AG} = \begin{bmatrix} -V_A \\ H_A \\ H_A x \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{AG}$$

Con l_{AG} è stata indicata la lunghezza del tratto AG .

Tratto GH: la sezione 2 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze V_A ed H_A e la porzione, di lunghezza x , del carico distribuito q , mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le altre forze: la restante porzione di q, g, P, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di sinistra avremo:

$$\underline{Q}_{GH} = \begin{bmatrix} -V_A \\ H_A - qx \\ H_A(l_{AG} + x) - \frac{qx^2}{2} \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{GH}$$

Con l_{GH} è stata indicata la lunghezza del tratto GH .

Tratto HL: la sezione 3 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze V_A, H_A e q , per intero, mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le altre forze: g, P, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di sinistra avremo:

$$\underline{Q}_{HL} = \begin{bmatrix} -V_A \\ H_A - ql_{GH} \\ H_A(l_{GA} + l_{GH} + x) - ql_{GH} \left(\frac{l_{GH}}{2} + x \right) \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{HL}$$

Con l_{HL} è stata indicata la lunghezza del tratto HL .

Tratto CL: la sezione 4 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra non agisce alcuna forza, mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le forze: V_A, H_A, q, g, P, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di sinistra avremo:

$$\underline{Q}_{CL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{CL}$$

Si ribadisce che si otterrebbe zero anche prendendo in esame il pezzo di destra. Su di esso agiscono tutte le forze che nel complesso sono equilibrate.

Con l_{CL} è stata indicata la lunghezza del tratto CL .

Tratto LM: la sezione 5 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze: V_A, H_A, q , mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le altre forze: g, P, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di sinistra avremo:

$$\underline{Q}_{LM} = \begin{bmatrix} V_A \cos \alpha + H_A \sin \alpha - ql_{GH} \sin \alpha \\ V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha + ql_{GH} \cos \alpha \\ V_A x \sin \alpha + H_A (l_{AG} + l_{GH} + l_{HL} - x \cos \alpha) - ql_{GH} \left(\frac{l_{GH}}{2} + l_{HL} - x \cos \alpha \right) \end{bmatrix}; 0 \leq x \leq l_{LM}$$

Con l_{LM} è stata indicata la lunghezza del tratto LM .

Tratto ME: la sezione 6 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze: V_A, H_A, q , mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le altre forze: g, P, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{ME} = \begin{bmatrix} V_B \cos \alpha - gl_{ID} \cos \alpha \\ P - V_B \sin \alpha + gl_{ID} \sin \alpha \\ -Px + k + M_B + V_B (l_{EI} + x) \sin \alpha - gl_{ID} \left[\frac{l_{ID}}{2} + (l_{EI} + x) \sin \alpha \right] \end{bmatrix}; 0 \leq x \leq l_{ME}$$

Con l_{ME} è stata indicata la lunghezza del tratto ME .

Tratto EI: la sezione 7 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze: V_A, H_A, q, P , mentre sul pezzo di destra agiscono tutte le altre forze: g, V_B e le coppie k e M_B . Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{EI} = \begin{bmatrix} V_B \cos \alpha - gl_{ID} \cos \alpha \\ -V_B \sin \alpha + gl_{ID} \sin \alpha \\ k + M_B + V_B x \sin \alpha - gl_{ID} \left[\frac{l_{ID}}{2} + x \sin \alpha \right] \end{bmatrix}; 0 \leq x \leq l_{EI}$$

Con l_{EI} è stata indicata la lunghezza del tratto EI .

Tratto ID: la sezione 8 taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze: V_A, H_A, q, P, V_B e le coppie k e M_B ed una porzione del carico distribuito g , men-

tre sul pezzo di destra agisce la porzione di g lunga x . Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{ID} = \begin{bmatrix} 0 \\ gx \\ -\frac{gx^2}{2} \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{ID}$$

Con l_{ID} è stata indicata la lunghezza del tratto ID .

Tratto IF: la sezione **9** taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze: V_A , H_A , q , P , g , mentre sul pezzo di destra agiscono la forze V_B e le coppie M_B e k . Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{IF} = \begin{bmatrix} -V_B \\ 0 \\ k + M_B \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{IF}$$

Con l_{IF} è stata indicata la lunghezza del tratto IF .

Tratto FB: la sezione **10** taglia la struttura in due parti. Sul pezzo di sinistra agiscono le forze: V_A , H_A , q , P , g , k , mentre sul pezzo di destra agiscono le forze V_B ed M_B . Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{FB} = \begin{bmatrix} -V_B \\ 0 \\ M_B \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l_{FB}$$

Con l_{FB} è stata indicata la lunghezza del tratto FB .

Se volessimo disegnare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione dovremmo tracciare, separatamente, un grafico per ciascun tratto, come se si trattasse di tante travi semplici affiancate.

12.1 Regole di raccordo

E' possibile prevedere cosa succede in corrispondenza dei punti di confine di due grafici adiacenti? Adesso studieremo le cosiddette *regole di raccordo*, cioè cosa accade ai diagrammi delle sollecitazioni in corrispondenza dei punti di passaggio da una funzione alla successiva.

12.1.1 Forze concentrate

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nella trave di Fig.4.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato (il sistema totalmente svincolato e quello parzialmente svincolato coincidono in quanto non ci sono vincoli interni singolari) possiede 3 *glp*, pertanto le equazioni di equilibrio da scrivere sono soltanto quelle dei moti assoluti

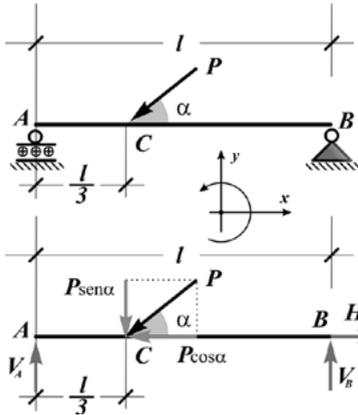


Fig. 4.12

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; & H_B - P \cos \alpha = 0 \\ \sum F_y = 0; & V_A + V_B - P \sin \alpha = 0 \\ \sum M_A = 0; & V_B l - P \sin \alpha \frac{l}{3} = 0 \end{cases}$$

Risolviendo otteniamo

$$\begin{aligned} H_B &= P \cos \alpha; \\ V_B &= \frac{P \sin \alpha}{3}; \\ V_A &= \frac{2P \sin \alpha}{3}; \end{aligned}$$

Essendo le reazioni tutte positive significa che i versi ipotizzati inizialmente erano corretti.

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni ed una nel punto di applicazione del carico *P* si ottengono due tratti, quindi occorre calcolare le funzioni *N(x)*, *T(x)*, *M(x)* nelle due sezioni 1 e 2 (Fig.5.12).

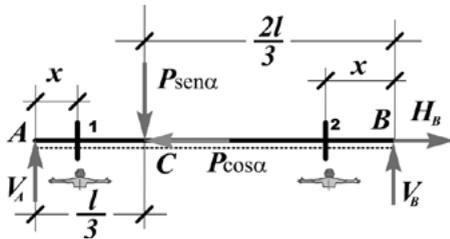


Fig. 5.12

Tratto AC: la sezione 1 taglia la trave in due parti. Sul pezzo di sinistra agisce la forza: *V_A*, mentre sul pezzo di destra agiscono le forze *V_B*, *H_B*, *P sin alpha* e *P cos alpha*.. Prendendo in esame il pezzo di sinistra avremo:

$$\underline{Q}_{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_A \\ V_A x \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{3}$$

Essendo il tratto privo di carichi distribuiti, ovviamente, vengono *N(x)=costante*, *T(x)=costante*, *M(x)=lineare*.

Tratto CB: la sezione 2 taglia la trave in due parti. Sul pezzo di destra agiscono le forze: *V_B* e *H_B*, mentre sul pezzo di sinistra agiscono le forze *V_A*, *P sin alpha* e *P cos alpha*.. Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{CB} = \begin{bmatrix} H_B \\ -V_B \\ V_B \cdot x \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq \frac{2l}{3}$$

Essendo il tratto privo di carichi distribuiti vengono $N(x)=cost.$, $T(x)=cost.$, $M(x)=lineare$.

I diagrammi sono riportati in Fig. 6.12.

I momenti in A e B devono essere nulli a causa della presenza delle cerniere. I momenti in C , per i due tratti, vengono di uguale segno e valore $2Pl\text{sen}\alpha/9$.

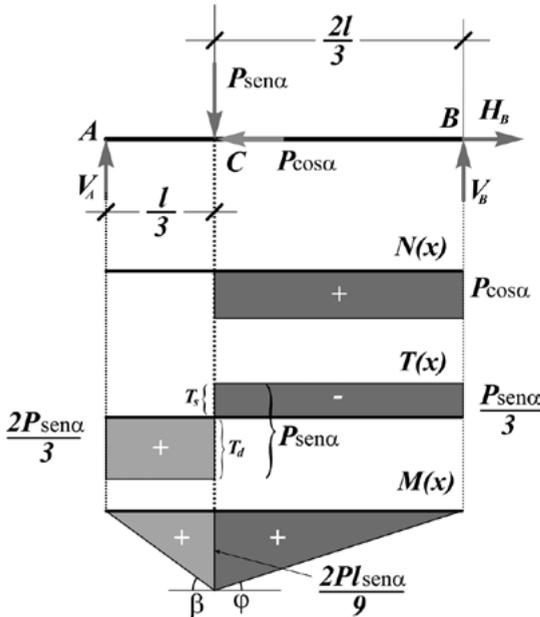


Fig. 6.12

il valore perchè se si effettua il taglio esattamente nel punto C non è possibile stabilire se le forze applicate nel medesimo punto devono far parte della porzione di destra o di sinistra. Tagliando ad una distanza infinitesima a sinistra ed infinitesima a destra del punto C , lo sforzo normale ed il taglio hanno un valore ben definito, ma tagliando esattamente in corrispondenza di C tale valore non è noto. Tutto ciò sembra una tipica astruseria di carattere matematico, ma un caso simile può anche verificarsi nella realtà. Si consideri una ballerina classica con lo scarpino perfettamente a punta e posto sul punto C , punto che si trova esattamente sulla linea di confine che separa la Francia dall'Italia (Fig. 7.12). La nostra artista posa il piede sul suolo italiano o su quello francese? La risposta corretta è: non si sa! L'unica cosa certa è che se si sposta di pochissimo verso destra essa è in Italia, mentre se si sposta di pochissimo verso sinistra è in Francia, ma se rimane sulla linea di confine la sua posizione non è definita.

momenti in C , per i due tratti, vengono di uguale segno e valore $2Pl\text{sen}\alpha/9$.

In corrispondenza della sezione C , vincolo al confine dei due tratti, si nota un salto brusco (scalino) nel diagramma dello sforzo normale di valore $P\text{cos}\alpha$, e, parimenti, un salto brusco nel diagramma del taglio di valore $P\text{sen}\alpha$. Nel diagramma dei momenti, in corrispondenza della medesima sezione C , non si ha nessun salto ma una *cuspidè*: un *punto angoloso*.

In C le funzioni $N(x)$ e $T(x)$ presentano quella che si chiama una *discontinuità a gradino*. Ciò è dovuto alla presenza di una forza concentrata parallela all'asse e di una forza concentrata normale all'asse. In corrispondenza del punto di discontinuità C lo sforzo normale ed il taglio non sono definiti: non se ne conosce esattamente



Fig. 7.12

Il posto della ballerina è preso, nel nostro caso, dalla forza concentrata P : essa è applicata proprio sul vincolo interno che si trova al confine dei due tratti AC e CB e pertanto, quando si vogliono trovare le reazioni in tale vincolo, non è possibile considerarla appartenente né al pezzo di sinistra né a quello di destra. Questa mancata attribuzione fa sì che il valore delle reazioni interne resti indefinito. Per il calcolo del momento flettente l'appartenenza o meno di P ad uno dei due tratti non ha nessuna importanza in quanto, essendo il suo braccio nullo rispetto a C , la forza, comunque, non verrebbe mai presa in considerazione.

La cuspidi nel diagramma del momento nasce perchè dovendo avere a sinistra e a destra di C due diversi valori del taglio (T_s e T_d), si dovranno avere anche due diverse inclinazioni (β e φ) delle rette tangenti. Si ricorda che $T_s = \tan\beta$ e che $T_d = \tan\varphi$.



- Nei punti dove sono applicate forze concentrate parallele all'asse della trave, nel diagramma dello sforzo normale è sempre presente un salto brusco pari al valore della forza.
- Nei punti dove sono applicate forze concentrate ortogonali all'asse della trave, nel diagramma del taglio è sempre presente un salto brusco pari al valore della forza e nel diagramma del momento nasce una angolosità nel verso del carico applicato (Fig.8.12)

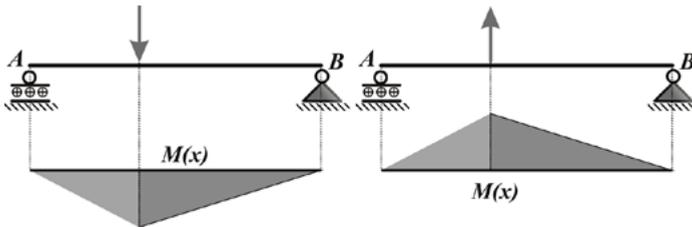


Fig. 8.12

Vale anche il discorso inverso:



- Nel diagramma dello sforzo normale non possono mai essere presenti salti se in corrispondenza di quei punti non è presente una forza concentrata parallela all'asse della trave.
- Nel diagramma del taglio e del momento flettente non possono mai essere presenti, rispettivamente, salti e angolosità se in corrispondenza di quei punti non è presente una forza concentrata ortogonale all'asse della trave.

12.1.2 Coppie concentrate

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nella trave di Fig.9.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato (il sistema totalmente svincolato e quello parzialmente svincolato coincidono in quanto non ci sono vincoli interni singolari) pos-

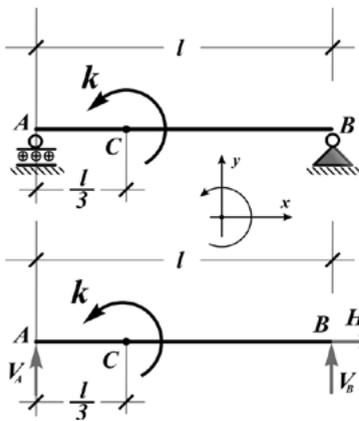


Fig. 9.12

siede 3 *glp*, quindi le equazioni di equilibrio da scrivere sono soltanto quelle dei moti assoluti

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_A = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_B = 0 \\ V_B l + k = 0 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} H_B &= 0; \\ V_B &= -\frac{k}{l}; \\ V_A &= \frac{k}{l}; \end{aligned}$$

La V_B ha valore negativo quindi il suo verso effettivo è opposto a quello ipotizzato in partenza, essa pertanto graficamente va cambiata di verso e numericamente va cambiata di segno.

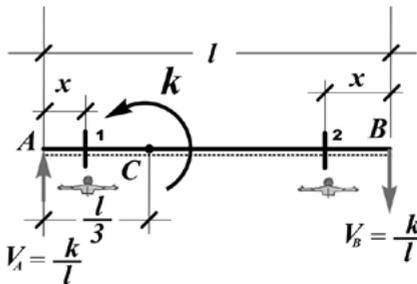


Fig. 10.12

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni ed una nel punto di applicazione della coppia k si ottengono due tratti, quindi occorre calcolare le funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ nelle due sezioni 1 e 2 (Fig.10.12).

Tratto AC: la sezione 1 taglia la trave in due parti. Sul pezzo di sinistra agisce la forza V_A , mentre sul pezzo di destra agiscono la forza V_B e la coppia k . Prendendo in esame il pezzo di sinistra avremo:

$$\underline{Q}_{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_A \\ V_A x \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{3}$$

Essendo il tratto privo di carichi distribuiti, ovviamente, vengono $N(x)=costante$, $T(x)=costante$, $M(x)=lineare$.

Tratto CB: la sezione 2 taglia la trave in due parti. Sul pezzo di destra agisce la forza V_B , mentre sul pezzo di sinistra agiscono la forza V_A e la coppia k . Prendendo in esame il pezzo di destra avremo:

$$\underline{Q}_{CB} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_B \\ -V_B x \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq \frac{2l}{3}$$

Essendo il tratto privo di carichi distribuiti vengono $N(x)=cost.$, $T(x)=cost.$, $M(x)=lineare$.

I diagrammi sono riportati in Fig. 11.12. In corrispondenza della sezione C il taglio ha il medesimo segno ed il medesimo valore per entrambi i tratti. I momenti in A e B devono essere nulli a causa della presenza delle cerniere e nel diagramma dei momenti, in corrispondenza della sezione di confine C , si nota, invece, un salto brusco (*scalino*) di valore k .

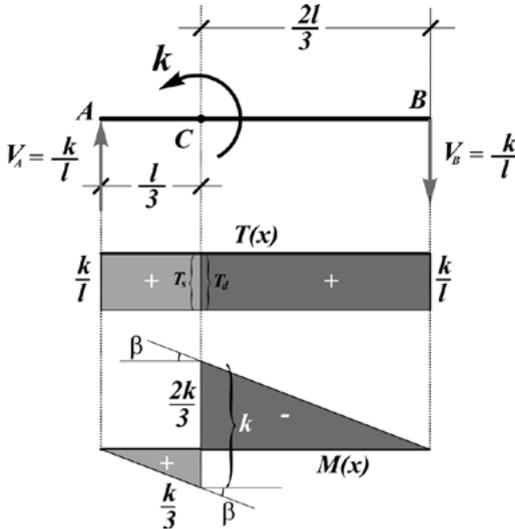


Fig. 11.12

Una coppia non dà luogo a taglio, per cui lo stesso problema di attribuzione non si presenta per il diagramma $T(x)$ dove non esiste alcuna discontinuità.

In C la funzione $M(x)$ presenta quella che si chiama una *discontinuità a gradino*. Ciò è dovuto alla presenza della coppia concentrata. In corrispondenza del punto di discontinuità C il momento flettente non è definito: non se ne conosce esattamente il valore perchè se si effettua il taglio esattamente nel punto C non è possibile stabilire se la coppia, applicata nel medesimo punto, deve far parte della porzione di destra o di sinistra.

Essendo i due tagli, a sinistra e destra della sezione C , uguali ($T_s=T_d$), pure uguali devono essere gli angoli che la tangente in C ai due diagrammi dei momenti forma con l'asse x (non deve esistere alcuna angolosità).



- Nei punti dove sono applicate coppie concentrate, nel diagramma dei momenti flettenti è sempre presente un salto brusco pari al valore della coppia.
- Le rette tangenti ai due diagrammi in corrispondenza del punto di discontinuità devono essere parallele in quanto il taglio non subisce salti.

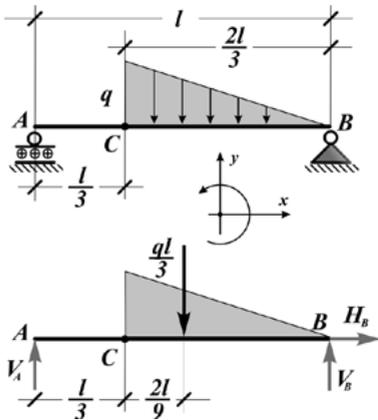
Vale anche il discorso inverso:



- Nel diagramma del momento flettente non possono mai essere presenti salti se in corrispondenza di quei punti non è presente una coppia concentrata.

12.1.3 Esempio 1.12

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della trave di Fig.12.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne, in modo univoco, le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato (il sistema totalmente svincolato e quello parzialmente svincolato coincidono in quanto non ci sono vincoli interni singolari) possiede $3\ g\ l\ p$, quindi le equazioni di equilibrio da scrivere sono soltanto quelle dei moti assoluti



$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_A = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_B - \frac{ql}{3} = 0 \\ V_B l - \frac{ql}{3} \left(\frac{l}{3} + \frac{2l}{9} \right) = 0 \end{cases}$$

Fig. 12.12

Risolvendo otteniamo

$$\begin{aligned} H_B &= 0; \\ V_B &= \frac{5ql}{27}; \\ V_A &= \frac{ql}{3} - \frac{5ql}{27} = \frac{4ql}{27}; \end{aligned}$$

Essendo le reazioni tutte positive significa che i versi ipotizzati inizialmente erano corretti.

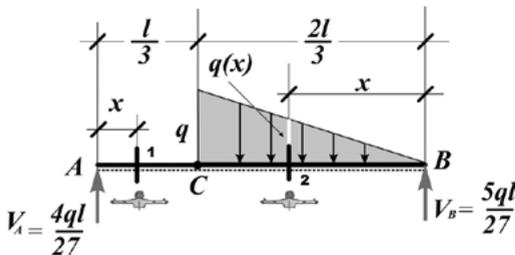


Fig. 13.12

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche necessarie. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni ed una nel punto di inizio del carico distribuito q si ottengono due tratti. Cerchiamo di disegnare direttamente i vari diagrammi senza l'ausilio delle funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ (Fig.13.12).

Lo sforzo normale è sicuramente costante in entrambi i tratti ($q_0(x)=0$) e, inoltre, deve avere il medesimo valore: se avesse valori diversi nei due tratti, in C dovremmo avere un salto, salto che non può esistere in quanto in C non c'è nessuna forza concentrata parallela all'asse della trave.

Se lo sforzo normale è costante e di eguale valore nei due tratti, basta calcolarlo in una sola sezione e sarà lo stesso in tutte le restanti. Se tagliamo ad es. in s_1 e guardiamo a sinistra troviamo la sola forza V_A che non ammette componente normale alla sezione. Quindi $N=0$ in tutti i vincoli interni della trave.

Lo sforzo di taglio è sicuramente costante nel tratto AC ($q_v(x)=0$), mentre deve essere quadratico nel tratto CB (in tale tratto il carico $q_v(x)$ è lineare). I due sforzi di taglio, a

sinistra e a destra di C , devono avere il medesimo valore ($T(s_2) = T(r_1)$), altrimenti ci sarebbe un salto. Nessun salto del taglio in C è possibile in quanto in questo punto non esiste alcun carico concentrato ortogonale all'asse.

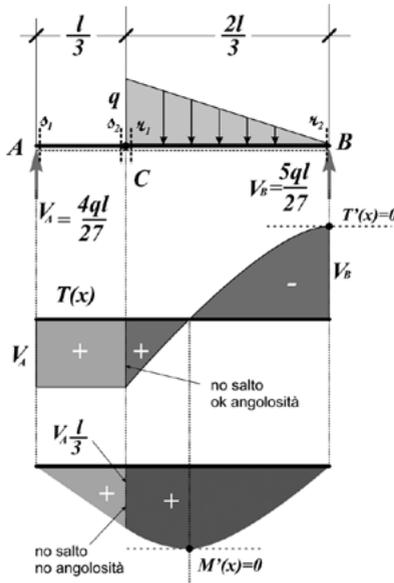


Fig. 14.12

distribuito e taglio sono assolutamente le stesse di quelle tra taglio e momento flettente).

Il *momento flettente* nel tratto AC è una retta quindi occorre conoscerne almeno due punti. In A il momento è sicuramente nullo a causa della presenza della cerniera, mentre in s_2 , se guardiamo a sinistra, il momento è positivo e vale $M(s_2) = V_A l/3$. Tracciando una retta passante per $M(s_1) = 0$ e $M(s_2) = V_A l/3$ otteniamo il diagramma del momento nel tratto AC .

Nel tratto CB il momento è una curva, per tracciarla occorrono almeno due punti da dove passa più i punti di stazionarietà. Due punti già li conosciamo, deve essere $M(r_1) = V_A l/3$ in quanto in C non può esistere un salto nel momento (non c'è alcuna coppia concentrata) e deve essere $M(r_2) = 0$ perchè in B abbiamo una cerniera. Quindi tracciando una curva che passa per i due punti $M(r_1) = V_A l/3$ e $M(r_2) = 0$, stazionaria dove si azzerava il taglio e priva di angolosità in C (non c'è salto nel taglio) otteniamo il diagramma del momento flettente in CB .

Nel tratto AC basta calcolare un solo valore di taglio. Se consideriamo la sezione s_1 e guardiamo a sinistra troviamo la sola forza V_A che, essendo parallela alla sezione stessa, da $T(s_1) = V_A$ che è valido per tutti i vincoli interni del tratto.

Nel tratto BC dobbiamo disegnare una curva, pertanto ci servono due punti da dove passa la curva stessa più il punto di stazionarietà. In r_1 è $T = V_A$ (non deve esistere salto), mentre in r_2 , se guardiamo a destra, abbiamo $T = -V_B$. Tracciando una curva stazionaria in B e che passa per $T(r_1) = V_A$ e $T(r_2) = -V_B$ abbiamo il grafico completo del taglio (Fig. 14.12).

L'angolosità in C nel diagramma del taglio è pienamente giustificata: ricordiamo che la derivata prima del taglio in un punto dà il corrispondente valore del carico distribuito in quello stesso punto. Poiché il carico distribuito $q_v(x)$ in C ha un salto deve essere presente un'angolosità nel diagramma del taglio (le relazioni tra carico

12.1.4 Esempio 2.12

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della trave di Fig. 15.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne univocamente le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato possiede 4 glp , 3 assoluti ed uno relativo, quindi le equazioni di equilibrio da scrivere sono 4, le tre per i moti assoluti e l'equazione per impedire la rotazione relativa attorno alla cerniera in D .

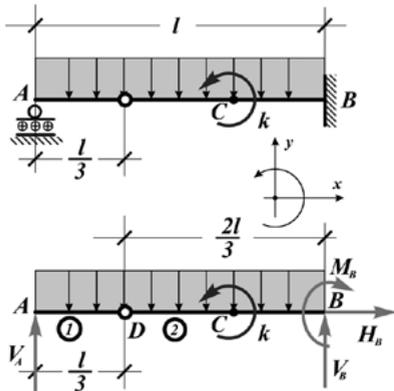


Fig.15.12

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_D^{(1)} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_B - ql = 0 \\ V_B l - ql \left(\frac{l}{2} \right) + k - M_B = 0 \\ -V_A \frac{l}{3} + \frac{ql}{3} \left(\frac{l}{6} \right) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo otteniamo

$$\begin{cases} H_B = 0; \\ V_A = \frac{ql}{6}; \\ V_B = \frac{5ql}{6}; \\ M_B = \frac{ql^2}{3} + k; \end{cases}$$

Essendo le reazioni tutte positive significa che i versi ipotizzati inizialmente erano corretti.

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche necessarie. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni ed una nel punto di applicazione della coppia k si ottengono due tratti, AC e CB (Fig.16.12). Cerchiamo di disegnare direttamente i vari diagrammi senza l'ausilio delle funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$

Lo sforzo normale è sicuramente costante in entrambi i tratti ($q_o(x)=0$) e, inoltre, deve avere il medesimo valore: se avesse valori diversi nei due tratti, in C dovremmo avere un salto, salto che non può esistere in quanto in C non c'è nessuna forza concentrata parallela all'asse della trave.

Se lo sforzo normale è costante e di eguale valore nei due tratti, basta calcolarlo in una sola sezione e sarà lo stesso in tutte le restanti. Se tagliamo ad es. in s_1 e guardiamo a sinistra troviamo la sola forza V_A che non ammette componente normale alla sezione. Quindi $N=0$ in tutti i vincoli interni della trave.

Lo sforzo di taglio è sicuramente lineare sia nel tratto AC che nel tratto CB (in tali tratti il carico $q_v(x)$ ha il medesimo valore ed è lineare). I due sforzi di taglio, a sinistra e a destra di C , devono avere il medesimo valore ($T(s_2)=T(r_1)$), altrimenti ci sarebbe un

salto. Nessun salto del taglio in C è possibile in quanto in questo punto non esiste alcun carico concentrato ortogonale all'asse. Inoltre il diagramma in C non deve avere angolosità, il carico $q_v(x)$ non presenta salti in tale punto. Pertanto il taglio nei due tratti è delimitato da un'unica retta, per rappresentarla basta calcolare ad es. i due valori nelle sezioni di estremità s_1 ed r_2 . Se sezioniamo in s_1 e guardiamo a sinistra lo sforzo tagliante è dato da V_A , se sezioniamo in r_2 e guardiamo a destra $T(r_2) = -V_B$. Tracciando la retta che congiunge i punti $T(s_1) = V_A$ e $T(r_2) = V_B$ otteniamo il grafico di $T(x)$ per tutta la trave (Fig. 16.12)

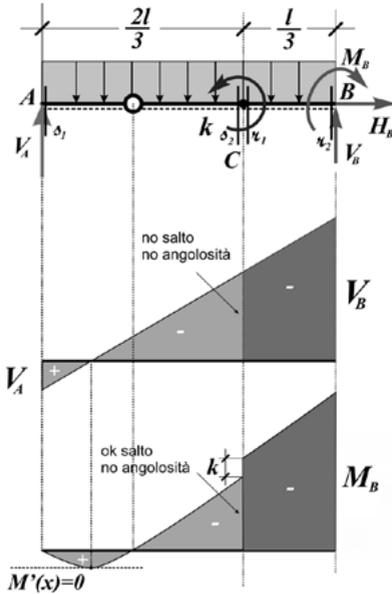


Fig. 16.12

in C un salto pari a k e deve raggiungere in r_2 il valore $-M_B$.

Il momento flettente nel tratto AC è una curva di secondo grado (taglio lineare) quindi occorre conoscere almeno due punti e il punto di stazionarietà. Il momento deve essere nullo in corrispondenza delle cerniere e la curva deve avere la concavità rivolta verso l'alto. Il punto di stazionarietà, pertanto, deve per forza essere compreso tra le cerniere A e D , e deve corrispondere al punto in cui si annulla il taglio. Se si traccia una curva passante per le cerniere, con la concavità in alto, si ottiene il diagramma $M(x)$ nel tratto AC .

Nel tratto CB il momento è una curva dello stesso tipo di quella precedente e non deve presentare angolosità in C . Tuttavia, a causa della presenza della coppia concentrata, il momento deve subire

12.1.5 Esempio 3.12

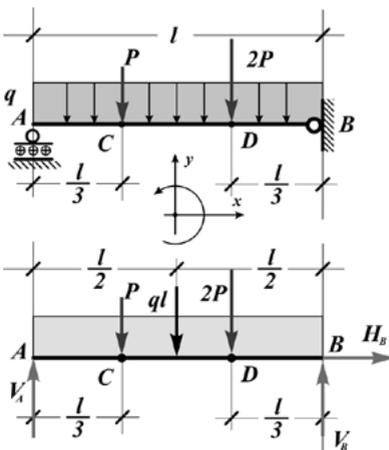


Fig. 17.12

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della trave di Fig.17.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne in modo univoco le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato possiede $3\ glp$, (il sistema totalmente svincolato e quello parzialmente svincolato coincidono in quanto non ci sono vincoli interni singolari) quindi le equazioni di equilibrio da scrivere sono 3, le tre per i moti assoluti.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; & H_B = 0 \\ \sum F_y = 0; & V_A + V_B - ql - 3P = 0 \\ \sum M_A = 0; & V_B l - ql \left(\frac{l}{2}\right) - 2P \left(\frac{2l}{3}\right) - P \left(\frac{l}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

Risolviendo otteniamo

$$\begin{aligned}
 H_B &= 0; \\
 V_B &= \frac{5P}{3} + \frac{ql}{2}; \\
 V_A &= ql + 3P - \left(\frac{5P}{3} + \frac{ql}{2} \right) = \frac{ql}{2} + \frac{4P}{3};
 \end{aligned}$$

Essendo le reazioni tutte positive significa che i versi ipotizzati inizialmente erano corretti.

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche necessarie. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni ed una nei punti di applicazione dei carichi concentrati, si ottengono tre tratti. Cerchiamo di disegnare direttamente i vari diagrammi senza l'ausilio delle funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ (Fig.18.12).

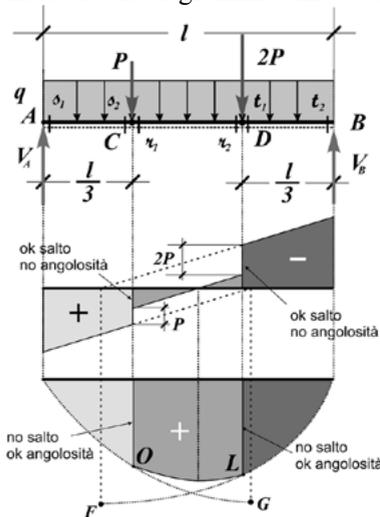


Fig. 18.12

Lo sforzo normale è sicuramente costante in tutti i tratti ($q_o(x)=0$) e, inoltre, deve avere il medesimo valore: se avesse valori diversi nei tre tratti, in C ed in D dovremmo avere dei salti, salti che non possono esistere in quanto in C ed in D non c'è nessuna forza concentrata parallela all'asse della trave. Se lo sforzo normale è costante e di eguale valore nei tre tratti, basta calcolarlo in una sola sezione e sarà lo stesso in tutte le restanti. Se tagliamo ad es. in s_1 e guardiamo a sinistra troviamo la sola forza V_A che non ammette componente normale alla sezione. Quindi $N=0$ in tutti i vincoli interni della trave.

Lo sforzo di taglio è lineare in tutti e tre i tratti e la retta che lo delimita deve avere la medesima inclinazione, non ci sono salti nel carico distribuito nei punti C e D, pertanto non possono esserci angolosità. A causa della presenza delle forze concentrate ortogonali all'asse della trave, il taglio deve subire in C un salto pari a P e in D un salto pari a $2P$. Per tracciare il grafico basta calcolare il valore della sollecitazione nei punti di estremità di ciascun tratto. Nel tratto AC: $T(s_1)=V_A$, $T(s_2)=V_A-ql/3$. Nel tratto CD: $T(r_1)=V_A-ql/3-P$, $T(r_2)=-2P+ql/3-V_B$. Nel tratto DB: $T(t_1)=ql/3-V_B$, $T(t_2)=-V_B$.

Il momento flettente è parabolico in tutti e tre i tratti, deve avere sempre la concavità rivolta verso l'alto ed essere nullo in A e B a causa della presenza delle cerniere, inoltre, nei punti C e D si devono avere delle angolosità e non devono essere presenti salti in quanto in quei punti agiscono forze concentrate ma non agiscono coppie. Per tracciare il grafico basta calcolare il valore della sollecitazione nei punti di estremità di ciascun tratto e individuare le varie stazionarietà in corrispondenza dei punti dove si annulla il taglio. Il punto di stazionarietà G è in corrispondenza del punto dove la retta che delimita il taglio nel tratto AC interseca l'asse della trave, così il punto F è in corrispondenza del punto dove la retta che delimita il taglio nel tratto DB interseca l'asse della trave.

12.1.6 Esempio 4.12

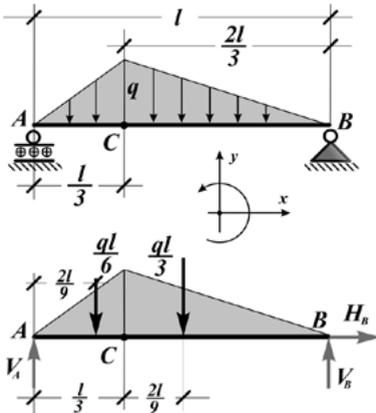


Fig. 19.12

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della trave di Fig.19.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne, in modo univoco, le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato possiede 3 *glp*, quindi le equazioni di equilibrio da scrivere sono 3, le tre per i moti assoluti.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_A = 0; \end{cases} \begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_B - \frac{ql}{3} - \frac{ql}{6} = 0 \\ V_B l - \frac{ql}{3} \left(\frac{l}{3} + \frac{2l}{9} \right) - \frac{ql}{6} \left(\frac{2l}{9} \right) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{cases} H_B = 0; \\ V_B = \frac{2ql}{9}; \\ V_A = \frac{ql}{2} - \frac{2ql}{9} = \frac{5ql}{18}; \end{cases}$$

Le reazioni V_A e V_B hanno valore positivo, quindi il verso ipotizzato per loro inizialmente era corretto.

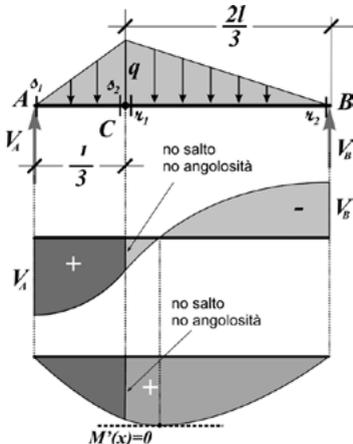


Fig. 20.12

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche necessarie. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni ed una nel punto terminale del primo carico triangolare (o iniziale del secondo) si ottengono 2 tratti. Cerchiamo di disegnare direttamente i vari diagrammi senza l'ausilio materiale delle funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ (Fig.20.12).

Lo sforzo normale è sicuramente costante in entrambi i tratti ($q_o(x)=0$) e, inoltre, deve avere il medesimo valore: se avesse valori diversi nei due tratti, in C dovremmo avere un salto, salto che non può esistere in quanto in C non c'è nessuna forza concentrata parallela all'asse della trave.

Se lo sforzo normale è costante e di eguale valore nei due tratti, basta calcolarlo in una sola sezione e sarà lo stesso in tutte le restanti. Se tagliamo ad es. in s_I e guardiamo a sinistra troviamo la sola forza V_A che non ammette componente normale alla sezione. Quindi $N=0$ in tutti i vincoli interni della trave.

Lo sforzo di taglio è quadratico in tutti e due i tratti (il carico $q_v(x)$ è lineare) ed in C non deve esserci alcun salto perchè non esiste in quel punto alcun carico concentrato or-

togonale all'asse. Le due curve, inoltre, devono raccordarsi in *C* senza presentare alcuna angolosità perché il carico distribuito in quel punto non ha salti. Ciascuna curva, inoltre, deve presentare un punto di stazionarietà dove si annulla il carico $q_v(x)$: punti *A* e *B*.

Per disegnare il grafico nel tratto *AC* occorre calcolare il valore di *T* nelle due sezioni di estremità s_1 e s_2 . $T(s_1)=V_A$, $T(s_2)=V_A-ql/6$. Nel tratto *CB*: $T(r_1)= T(s_1)$, non deve esserci alcun salto brusco, e $T(r_2)= -V_B$. Ciascuna curva deve essere stazionaria rispettivamente in *A* e *B* (Fig. 20.12).

Il *momento flettente* è cubico in tutti e 2 i tratti, deve essere tutto al di sotto della fondamentale (la deformata della trave presenta la convessità verso il basso) e deve essere nullo in *A* e *B* a causa della presenza delle cerniere. Nel punto di raccordo *C* il diagramma non deve presentare alcun salto in quanto, in quel punto, non agisce alcuna coppia concentrata. La curva in *CB* deve avere un punto di stazionarietà dove si annulla il taglio.

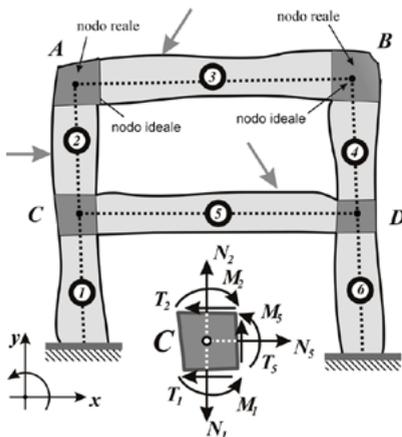
Per tracciare il grafico basta calcolare il valore della sollecitazione nei punti di estremità di ciascun tratto. Nel tratto *AC*: $M(s_1)= 0$, $M(s_2)= V_A l/3-ql/6(l/9)$. Nel tratto *CB*: $M(r_1)=M(s_1)$, in quanto non deve esserci alcun salto, e $M(r_2)= 0$.

12.1.7 Equazioni di equilibrio dei nodi

Abbiamo definito *nodi* i punti di intersezione di travi con diversa direzione, partendo dalla definizione geometrica di nodo come punto d'intersezione di due o più linee. Tutto ciò deriva dal fatto che siamo soliti rappresentare schematicamente dei solidi monodimensionali attraverso delle linee che ne rappresentano gli assi geometrici. In realtà i nodi non sono affatto dei punti ma sono delle porzioni di materia che fungono da elemento di raccordo di più travi convergenti (Fig. 21.12).

Si isoli un nodo qualunque, ad es. *C*, tramite dei tagli ortogonali all'asse delle travi convergenti. L'azione che le estremità delle travi esercitavano sul nodo non sono altro che le tre caratteristiche della sollecitazione N_i , T_i ed M_i . Se l'intera struttura è in equilibrio lo deve essere anche una sua parte isolata, sia pur piccola quanto si vuole, pertanto il nodo *C* deve essere in equilibrio, cioè le forze agenti su di esso devono soddisfare le condizioni di nullità del risultante e del momento risultante. Assumendo il punto *C* (centro del nodo) come polo si ha:

Fig. 21.12



$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_C = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} N_5 - T_1 - T_2 = 0 \\ N_2 - N_1 + T_5 = 0 \\ M_1 + M_5 - M_2 - T_1 d_1 + T_2 d_2 + T_5 d_5 = 0 \end{cases}$$

le distanze d_1 , d_2 , d_5 sono le distanze che le sezioni di attacco delle aste *1*, *2* e *5* hanno dal punto *C* (Fig.22.12). Ovviamente, se le aste convergenti nel nodo, anziché ortogona-

li tra loro, fossero state inclinate sarebbe stato necessario effettuare la proiezione di tutte le sollecitazioni sugli assi di riferimento x, y e z .

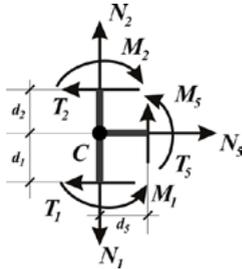


Fig. 22.12

Di solito si fa un'ipotesi che semplifica le equazioni di equilibrio dei nodi, questa ipotesi è che *i nodi hanno dimensioni infinitesime* o, se si vuole, che le distanze d_i sono trascurabili rispetto alla lunghezza delle travi. Un'altra ipotesi semplificativa che spesso si associa ai nodi è che essi si considerano sempre *indeformabili*, cioè gli angoli relativi formati dai bracci del nodo rimangono sempre invariati.

Se si accetta l'ipotesi che la dimensione dei nodi è infinitesima (non sempre, tuttavia, tale ipotesi è valida), le distanze d_i divengono nulle e pertanto le equazioni di equilibrio si semplifi-

cano

$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_c = 0; \end{cases} \begin{cases} N_3 - T_1 - T_2 = 0 \\ N_2 - N_1 + T_5 = 0 \\ M_1 + M_5 - M_2 = 0 \end{cases}$$

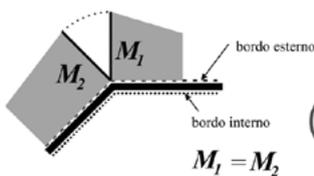
Le prime due equazioni ci dicono semplicemente che lo sforzo normale, o il taglio, all'estremità di un'asta è funzione delle altre sollecitazioni normali e taglianti delle rimanenti aste che convergono nel nodo. L'ultima equazione comporta la definizione di una regola generale che è utile al fine del disegno dei diagrammi del momento flettente in strutture geometricamente complesse:



La somma dei momenti che le aste trasmettono ad un nodo deve sempre essere nulla.

Ciò comporta che, se in un nodo i momenti convergenti non nulli sono soltanto 2, essi devono risultare uguali come intensità e di verso opposto. Graficamente l'eguaglianza e l'opposizione dei momenti si evidenzia con un ribaltamento dell'ordinata del diagramma che deve sempre essere effe-

RIBALTAMENTO ESTERNO-ESTERNO



RIBALTAMENTO INTERNO-INTERNO

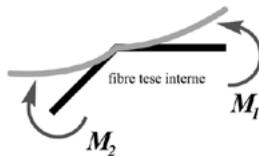
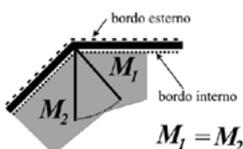


Fig. 23.12

tuato in modo tale che sia sempre *esterno-esterno* o *interno-interno* rispetto al nodo (Fig.23.12)

La comprensione di questa regola viene fuori dall'osservazione della deformata del nodo sottoposto a due momenti uguali ed opposti: come si vede le fibre tese stanno sempre o sul bordo esterno e su quello interno del nodo, pertanto anche i diagrammi dei momenti (che abbiamo scelto di riportare sempre dal lato delle fibre tese) devono risultare entrambi sul bordo esterno o su quello interno del nodo.

Se in un nodo arrivano più di due momenti diversi da zero, ovviamente non va operato alcun ribaltamento, anzi le ordinate dei momenti devono essere tutte diverse tra loro ma tali che la loro somma dia zero.

12.1.8 Esempio 5.12

Si vogliono tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura di Fig.24.12. Il sistema è isostatico, pertanto è possibile calcolarne in modo univoco le reazioni dei vincoli esterni. Il sistema parzialmente svincolato possiede $3\ glp$, quindi le equazioni di equilibrio da scrivere sono 3, soltanto le tre per i moti assoluti.

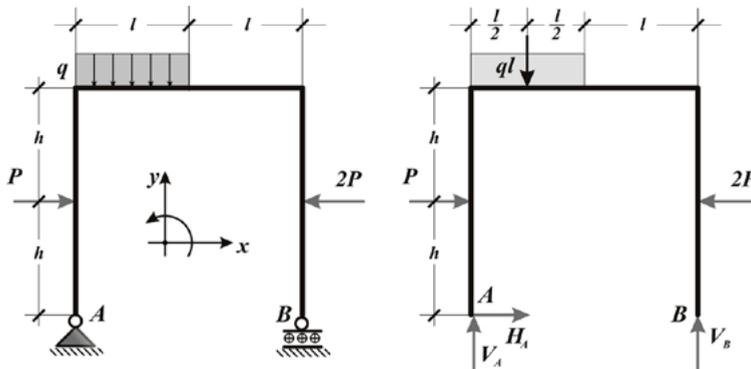


Fig. 24.12

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_c = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} H_A + P - 2P = 0 \\ V_A + V_B - ql = 0 \\ V_B 2l - ql \left(\frac{l}{2} \right) + 2Ph - Ph = 0 \end{array} \right.$$

Risolvendo otteniamo

$$\boxed{\begin{array}{l} H_A = P; \\ V_B = \frac{ql}{4} - \frac{Ph}{2l}; \\ V_A = ql - \left(\frac{ql}{4} - \frac{Ph}{2l} \right) = \frac{3ql}{4} + \frac{Ph}{2l}; \end{array}}$$

Le reazioni H_A e V_A hanno valore positivo, quindi il verso ipotizzato per loro inizialmente era corretto. La reazione V_B è data dalla differenza di due termini letterali di cui non sappiamo quale è il maggiore. Se $ql/4 > Ph/(2l)$ allora il verso ipotizzato per la V_B è

corretto, altrimenti essa andrà cambiata di verso e di segno. Supponiamo che il verso corretto di V_B sia quello assegnato inizialmente.

Passiamo a definire i tratti di variazione e le corrispondenti sezioni generiche necessarie. Mettendo una lettera in corrispondenza dei vincoli esterni, una per ciascun nodo, una nei punti di applicazione dei carichi concentrati ed una nel punto finale del carico distribuito q si ottengono 6 tratti. Cerchiamo di disegnare direttamente i vari diagrammi senza l'ausilio delle funzioni $N(x)$, $T(x)$, $M(x)$ (Fig.25.12).

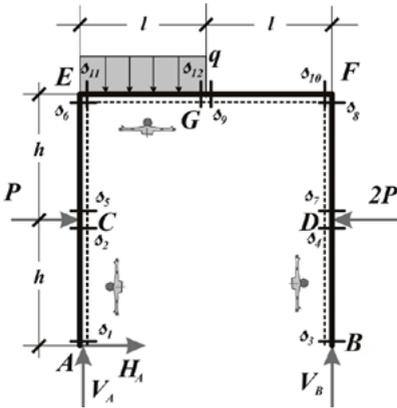


Fig. 25.12

Lo sforzo normale è sicuramente costante in tutti i tratti ($q_n(x)=0$) e non deve presentare salti nelle sezioni di confine C , G e D in quanto, in tali punti, non c'è nessuna forza concentrata parallela all'asse della trave.

Se lo sforzo normale è costante basta calcolarlo in una sola sezione per tratto.

Se tagliamo in s_1 e guardiamo a sinistra troviamo le forze V_A e H_A , soltanto la prima ammette componente sulla normale alla sezione. Quindi $N = -V_A$ in tutti i vincoli interni del tratto AC .

Se tagliamo in s_3 e guardiamo a destra troviamo la forza V_B che ammette componente sulla normale alla sezione. Quindi $N = -V_B$ in tutti i vincoli interni del tratto BD .

Se tagliamo in s_5 e guardiamo a sinistra troviamo le forze V_A , H_A e P , ma solo la prima ammette componente sulla normale alla sezione. Quindi $N = -V_A$ in tutti i vincoli interni del tratto CE .

Se tagliamo in s_7 e guardiamo a destra troviamo le forze V_B e $2P$, ma solo la prima ammette componente sulla normale alla sezione. Quindi $N = -V_B$ in tutti i vincoli interni del tratto DF .

Se tagliamo ad es. in s_{11} e guardiamo a sinistra¹ troviamo le forze V_A , H_A e P , ma solo la H_A e P ammettono componente sulla normale alla sezione. Quindi $N = -H_A - 2P$ in tutti i vincoli interni del tratto EG .

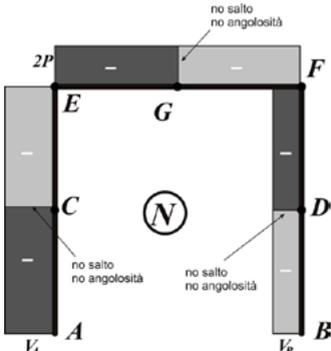


Fig. 26.12

Se tagliamo in s_{10} e guardiamo a destra troviamo le forze V_B e $2P$, ma solo la $2P$ ammette componente sulla normale alla sezione. Quindi $N = -2P$ in tutti i vincoli interni del tratto FG . In Fig. 26.12 è disegnato il diagramma completo dello sforzo normale.

Lo sforzo di taglio, è lineare nel tratto EG ($q_v(x)=cost$), mentre in tutti i restanti tratti è costante ($q_v(x)=0$). Nei punti di raccordo C e D deve presentare dei salti bruschi di valore uguale rispettivamente ai carichi concentrati P e $2P$. Nel punto G non deve essere presente alcun salto in quanto non è presente alcuna forza concentrata normale all'asse della struttura. Nel tratto EG , essendo lineare, occorre calcolare il taglio almeno in due sezioni,

mentre negli altri tratti basta calcolarlo in una sola.

¹ La sezione s_{11} è al limite sinistro del tratto EG , la porzione di carico distribuito, di altezza q , che ricade alla sua sinistra ha base nulla, pertanto la sua risultante è zero.

Se tagliamo in s_1 e guardiamo a sinistra troviamo le forze V_A e H_A , soltanto la seconda ammette componente sulla retta parallela alla sezione. Quindi $T = -H_A$ in tutti i vincoli interni del tratto AC .

Se tagliamo in s_3 e guardiamo a destra non troviamo alcuna forza. Quindi $T = 0$ in tutti i vincoli interni del tratto BD .

Se tagliamo in s_5 e guardiamo a sinistra troviamo le forze V_A , H_A e P , ma soltanto due di esse ammettono componente sulla parallela alla sezione. Quindi $T = -H_A - P$ in tutti i vincoli interni del tratto CE .

Se tagliamo in s_7 e guardiamo a destra troviamo le forze V_B e $2P$, ma solo la seconda ammette componente sulla parallela alla sezione. Quindi $T = 2P$ in tutti i vincoli interni del tratto DF .

Se tagliamo ad es. in s_{11} e guardiamo a sinistra troviamo le forze V_A , H_A e P , ma solo la V_A ammette componente sulla parallela alla sezione. Quindi $T = V_A$ in tutti i vincoli interni del tratto EG .

Se tagliamo in s_{10} e guardiamo a destra troviamo le forze V_B e $2P$, ma solo la V_B ammette componente sulla parallela alla sezione. Quindi $T = -V_B$ in tutti i vincoli interni del tratto FG . In Fig. 27.12 è disegnato il diagramma completo dello sforzo tagliante.

La sezione più sofferente è quella in corrispondenza del nodo E o del nodo F .

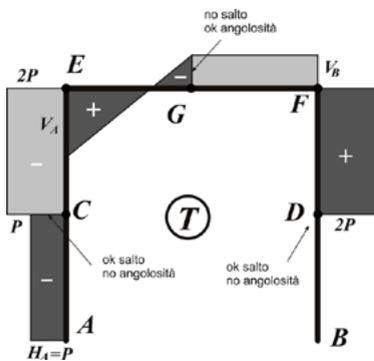


Fig. 27.12

Il momento flettente, infine, deve essere nullo nelle cerniere in A e B ed è parabolico nel tratto EG ($T(x)=\text{lineare}$) e deve avere la concavità verso l'alto. Nel tratto DB deve essere costante (il taglio è nullo) e in tutti gli altri tratti deve essere lineare ($T(x)=\text{cost}$). Nei punti di raccordo dove il taglio presenta dei salti (punti C e D) il diagramma del momento deve presentare delle angolosità nel verso del carico. In nessun punto di raccordo esistono salti in quanto, in tali punti, non sono presenti coppie concentrate. I due soli momenti che convergono nel nodo E e nel nodo F devono essere uguali, quindi in tali nodi occorre operare un ribaltamento dell'ordinata.

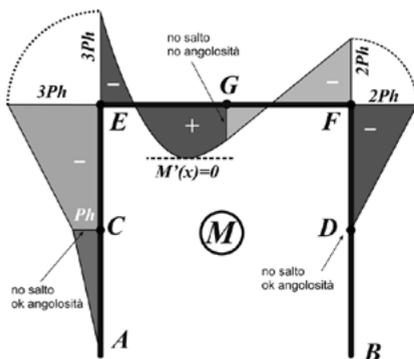
Nel tratto AC occorre conoscere il momento in due punti: nella sezione s_1 è nullo, mentre nella s_2 è, guardando a sinistra, $M=-H_A h$.

Nel tratto BD occorre conoscere il momento in un solo punto: nella sezione s_3 è nullo, quindi tale valore deve avere anche in tutti gli altri vincoli interni del tratto BD .

Nel tratto CE occorre conoscere il momento in due punti: nella sezione s_5 esso ha lo stesso valore di quello nella sezione s_2 (non deve esistere salto), nella sezione s_6 , guardando a sinistra, si ha $M(s_6) = -H_A 2h - Ph = -3Ph$.

Fig. 28.12

Nel tratto DF occorre conoscere il momento in due punti: nella sezione s_7 esso ha lo stesso valore (0) di quello nella sezione s_4 (non deve esistere salto), nella sezione s_8 , guardando a destra, si ha $M(s_8) = -2Ph$.



Nel tratto **GF** occorre conoscere il momento in due punti: nella sezione s_9 , guardando a destra, si ha $M(s_9) = -2Ph + V_{Bl}$, mentre nella sezione s_{10} , sempre guardando a destra, si ha $M(s_{10}) = -2Ph$ (questo valore, per l'equilibrio al nodo, come si vede è lo stesso di quello nella sezione s_8)²

Nel tratto **EG** occorre conoscere il momento in due punti e occorre anche sapere la posizione del punto di stazionarietà: nella sezione s_{11} , guardando a sinistra, si ha:

$M(s_{11}) = -H_A 2h - Ph = -3Ph$ (questo valore, per l'equilibrio al nodo, come si vede è lo stesso di quello nella sezione s_6), mentre nella sezione s_{12} , guardando a destra, si ha $M(s_{12}) = V_{Bl} - 2Ph$.

In Fig. 28.12 è disegnato il diagramma completo del momento flettente. La sezione più sofferente è quella in corrispondenza del nodo **E**.

12.2 Sistemi molteplicemente connessi

Una struttura, composta da travi variamente vincolate, si dice *semplicemente connessa* se, tagliandola in una sezione qualunque, essa rimane sempre suddivisa in due parti distinte. E' ciò che succede ad es. ad un albero: intricati per quanto siano i suoi rami, se si effettua un taglio **S** con una motosega, in un punto qualunque, si ottiene sempre una porzione indipendente che è possibile portar via (Fig. 29.12).



Esistono invece delle strutture, che presentano dei campi chiusi, in cui un taglio non è sufficiente per suddividerle in due corpi indipendenti: le strutture che hanno tale proprietà prendono il nome di *strutture molteplicemente connesse*. Il numero di campi chiusi presenti in un sistema monodimensionale prende il nome di *grado di connessione* e si indica con *gc*.

Fig. 29.12

Esistono invece delle strutture, che presentano dei campi chiusi, in cui un taglio non è sufficiente per suddividerle in due corpi indipendenti: le strutture che hanno tale proprietà prendono il nome di *strutture molteplicemente connesse*. Il numero di campi chiusi presenti in un sistema monodimensionale prende il nome di *grado di connessione* e si indica con *gc*.

In Fig. 30.12 sono mostrati vari esempi di sistemi *pluri-connessi* ed in corrispondenza di ciascuno di essi è indicato il grado di connessione (*gc=0* individua un sistema semplicemente connesso).

In un sistema molteplicemente connesso non è possibile, almeno limitatamente ai vincoli interni che appartengono ad un campo chiuso, calcolare le caratteristiche della sollecitazione: ciò deriva dal fatto che le reazioni del vincolo interno di continuità si ottengono scrivendo le equazioni di equilibrio di una delle due porzioni in cui resta divisa la struttura con un taglio. Poiché, tagliando all'interno dei campi, il sistema rimane di un sol pezzo, tale procedimento cade in difetto.

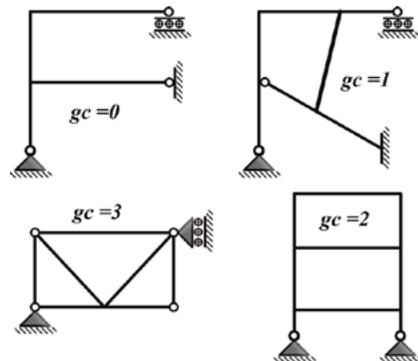


Fig. 30.12

² Il fatto che i due momenti devono avere verso opposto non ha nulla a che vedere con il loro segno, in quanto quest'ultimo mi dice semplicemente se il momento va riportato sopra o sotto la fondamentale. Il segno del momento quindi è legato al modo come si osserva la struttura, alla posizione della linea tratteggiata che abbiamo prescelto.

Esiste una strategia che consenta di aggirare l'ostacolo? La risposta è senz'altro affermativa. Prima occorre, però, rivedere le modalità di calcolo delle condizioni di vincolo, perché la presenza delle connessioni multiple può influire sul grado di molteplicità dei vincoli interni.

12.2.1 Calcolo delle condizioni di vincolo

In presenza di campi chiusi l'algoritmo per il calcolo dell'isostaticità, labilità o iperstaticità presenta delle differenze rispetto a quello standard visto in precedenza.

La prima operazione è sempre quella di svincolare il sistema eliminando i vincoli esterni e quelli interni singolari. Poi si procede alla conta del numero dei pezzi rigidi indipendenti ed al calcolo del loro grado di libertà complessivo $gl=3n$ (6 se siamo nello spazio). Oltre al grado di molteplicità dei vincoli esterni (gme) e di quelli interni singolari (gmi), occorre, adesso, calcolare un ulteriore grado di molteplicità che dipende dai campi chiusi ancora presenti nel sistema svincolato. Il grado di molteplicità dovuto ai campi chiusi (gmc) si ottiene moltiplicando per 3 (6 nello spazio) il grado di connessione (gc) della struttura svincolata:

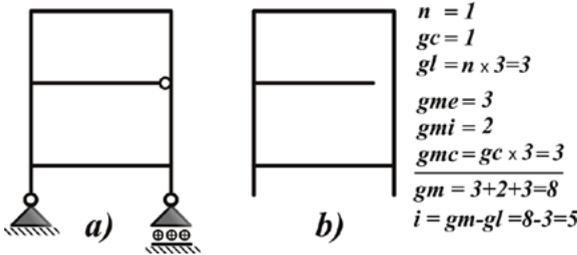


Fig. 31.12

condizioni di vincolo della struttura di Fig. 31.12a. Il sistema svincolato (Fig. 31.12b) risulta formato da un solo pezzo, quindi $n=1$. La soppressione della cerniera interna ha ridotto i campi chiusi da 2 ad 1: quindi, essendo $gc=1$, il grado di molteplicità dovuto ai campi chiusi è $gmc=3gc=3$.

Il grado di molteplicità dei vincoli esterni soppressi è $gme=2+1=3$, quello del vincolo interno soppresso è $gmi=2$ (la cerniera collega due pezzi: la trave ed il montante). Il grado di libertà del sistema svincolato risulta $gl=3n=3$, il grado di molteplicità totale è dato da $gm=gme+gmi+gmc=3+2+3=8$. Essendo $gm>gl$ il sistema è iperstatico con grado di iperstaticità $i=gm-gl=8-3=5$.

A titolo di esempio, calcolare le

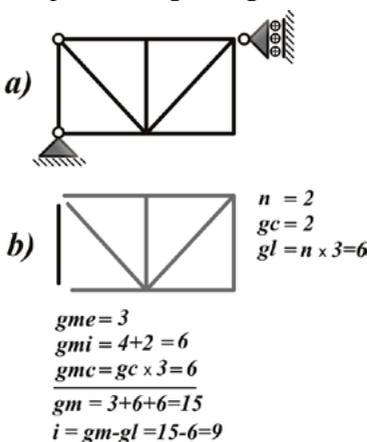


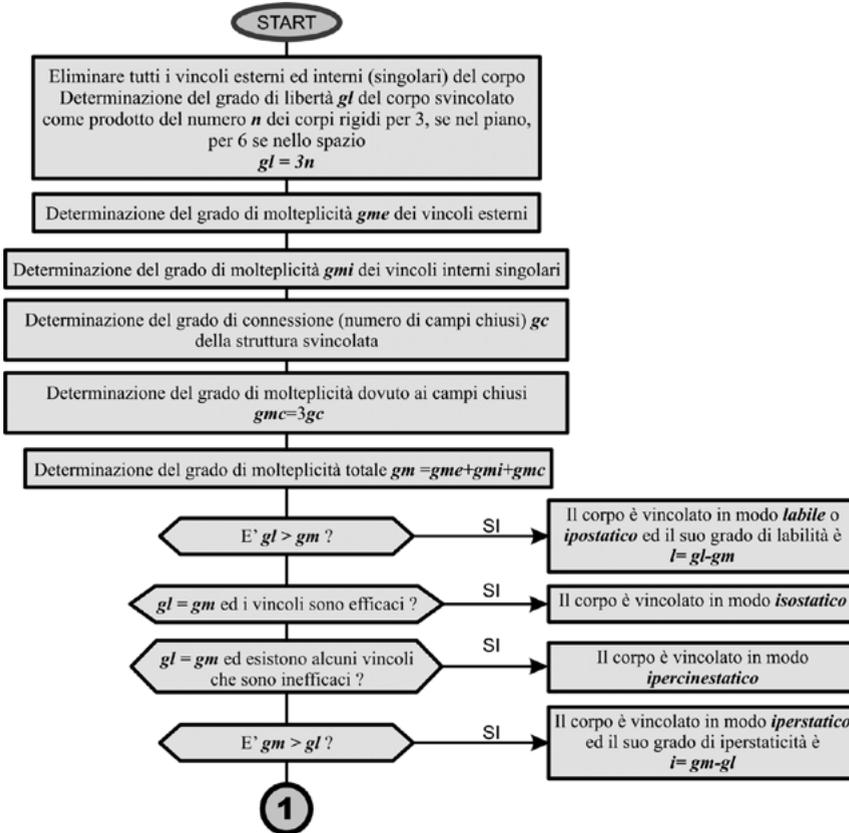
Fig. 32.12

Il grado di molteplicità dei vincoli esterni soppressi è $gme=2+1=3$, quello dei vincoli interni soppressi è $gmi=4+2=6$ (una cerniera collega tre pezzi, l'altra soltanto due). Il gra-

Facciamo un ulteriore esempio: calcolare le condizioni di vincolo della struttura di Fig. 32.12a. Il sistema svincolato (Fig. 32.12b) risulta formato da due pezzi, quindi $n=2$. La soppressione delle cerniere interne ha ridotto i campi chiusi da 4 a 2: quindi, essendo $gc=2$, il grado di molteplicità dovuto ai campi chiusi è $gmc=3gc=3x2=6$.

do di libertà del sistema svincolato risulta $gl=3n=6$, il grado di molteplicità totale è dato da $gm=gme+gmi+gmc=3+6+6=15$.

Essendo $gm>gl$ il sistema è iperstatico con grado di iperstaticità $i=gm-gl=15-6=9$.



12.2.2 Trasformazione di un sistema pluriconnesso

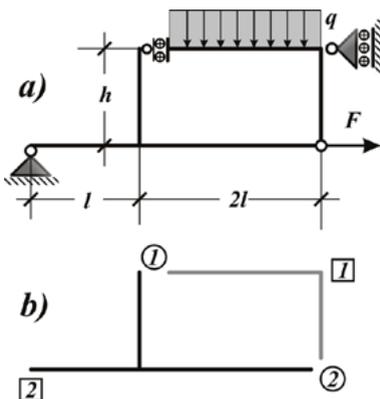


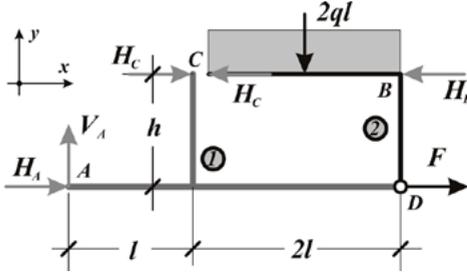
Fig. 33.12

Mentre, al fine del calcolo delle reazioni dei vincoli esterni, l'eventuale presenza di campi chiusi non comporta alcuna difficoltà, nel calcolo, invece, delle caratteristiche della sollecitazione, in certe sezioni, essa comporta l'assoluta impossibilità di operare. Ai tagli effettuati in corrispondenza dei campi chiusi non consegue la suddivisione della struttura in due parti distinte, per cui il calcolo delle funzioni $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$ cade in difetto. L'ostacolo è aggirabile se si trasforma il sistema pluriconnesso in uno privo di campi chiusi. Per ottenere ciò occorre aprire preventivamente i campi, operando delle mirate soppressioni dei vincoli interni in essi presenti.

Si vogliono calcolare le reazioni dei vincoli esterni

ed interni della struttura molteplicemente connessa di Fig. 33.12a.

Cominciamo con il determinare le condizioni di vincolo del sistema. Eliminiamo tutti i vincoli esterni ed i vincoli interni singolari (Fig.33.12b). Il numero di pezzi rigidi indipendenti è $n=2$, quindi il grado di libertà del sistema svincolato è $gl=3n=6$. Il grado di molteplicità dei vincoli esterni soppressi è $gme=2+1=3$. Il grado di molteplicità dei vincoli interni soppressi è $gmi=2+1=3$. Il campo chiuso presente nella struttura integra sparisce a causa della soppressione dei vincoli, quindi il numero di connessioni presenti nel sistema svincolato è $gc=0$: ciò comporta che il grado di molteplicità dovuto ai campi chiusi è $gmc=3gc=0$. Essendo il grado di molteplicità totale



chiusi è $gmc=3gc=0$. Essendo il grado di molteplicità totale

$$gm=gme+gmi+gmc=3+3+0=6,$$

esattamente uguale al grado di libertà gl , la struttura, se i vincoli sono efficaci, è *isostatica*.

Per ovviare all'inconveniente che sarà dato dalla molteplicità di connessione, oltre a sopprimere i vincoli esterni, apriamo contemporaneamente tutti i campi chiusi sopprimendo uno dei vincoli interni in essi presenti.

Fig. 34.12

Ricordando che il vincolo di continuità è un vincolo triplo (nel piano), pertanto conviene sempre sopprimere il vincolo interno al campo con il grado di molteplicità più basso. Nel nostro caso (Fig. 33.12a) abbiamo un solo campo chiuso ed il vincolo più conveniente da sopprimere è il carrello.

Ciascun vincolo soppresso va sostituito con le corrispondenti reazioni incognite. Si ricorda che le reazioni di un vincolo interno vanno sempre sdoppiate ed applicate, con i versi opposti, nei due punti che erano cuciti insieme dal vincolo stesso (Fig.34.12).

Il sistema parzialmente svincolato possiede $glp=gl-gmi=6-2=4$ gradi di libertà, pertanto occorre scrivere 3 equazioni di equilibrio per i moti assoluti ed una per i moti relativi. Notare che, questa volta, (contrariamente al procedimento per il calcolo delle condizioni di vincolo) gmi è il grado di molteplicità non più di tutti i vincoli interni singolari ma soltanto dei vincoli interni che sono rimasti dopo l'apertura del campo

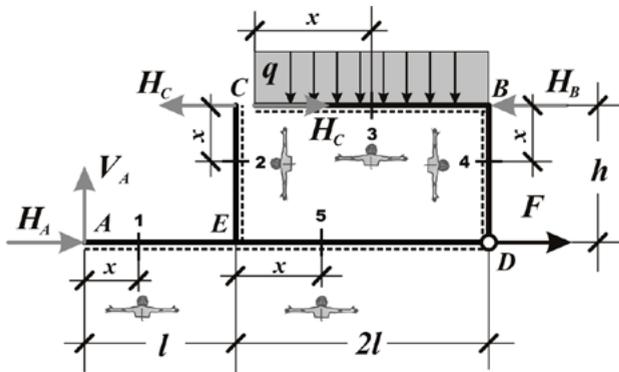
$$\begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \\ \sum M_A = 0; \\ \sum M_D^{(2)} = 0; \end{cases} \begin{cases} H_A + H_C - H_C - H_B + F = 0; \\ V_A - 2ql = 0; \\ H_C h - H_C h - 2ql(2l) + H_B h = 0; \\ H_C h + 2ql(l) + H_B h = 0; \end{cases}$$

Come è facile notare, nelle equazioni di equilibrio per i moti assoluti, le reazioni interne intervengono entrambe e quindi, essendo direttamente opposte, si annullano a vicenda. Risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{4ql^2}{h} - F; \\ V_A &= 2ql; \\ H_B &= \frac{4ql^2}{h}; \\ H_C &= -\frac{6ql^2}{h}; \end{aligned}$$

La reazione H_C , essendo di segno negativo, ha il verso opposto a quello inizialmente ipotizzato e quindi va cambiata di verso e di segno; il segno della reazione H_A non è ipotizzabile in quanto dipende dal valore numerico dei due termini in sottrazione.

Passiamo adesso ad individuare i vari tratti e a calcolarne le funzioni $N(x)$, $T(x)$ ed $M(x)$ (Fig. 35.12)



$$\begin{aligned} H_A &= \frac{4ql^2}{h} - F; \\ V_A &= 2ql; \\ H_B &= \frac{4ql^2}{h}; \\ H_C &= \frac{6ql^2}{h}; \end{aligned}$$

Fig. 35.12

Tratto AE, sezione generica 1, tagliando e guardando a sinistra si ottiene

$$\underline{Q}_{AE} = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_A \\ V_A \\ V_A x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{4ql^2}{h} - F\right) \\ 2ql \\ 2qlx \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq l$$

Tratto EC, sezione generica 2, tagliando e guardando a destra si ottiene

$$\underline{Q}_{EC} = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -H_C \\ H_C x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{6ql^2}{h} \\ \frac{6ql^2}{h} x \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq h$$

Tratto CB, sezione generica 3, tagliando e guardando a sinistra si ottiene

$$\underline{Q}_{CB} = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_C \\ -qx \\ -\frac{qx^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6ql^2}{h} \\ -qx \\ -\frac{qx^2}{2} \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq 2l$$

Tratto BD, sezione generica 4, tagliando e guardando a sinistra si ottiene

$$\underline{Q}_{BD} = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ql \\ H_C - H_B \\ H_C x - H_B x - 2ql^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ql \\ \frac{6ql^2}{h} - \frac{4ql^2}{h} \\ \frac{6ql^2}{h} x - \frac{4ql^2}{h} x - 2ql^2 \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq h$$

Tratto ED, sezione generica 5, tagliando e guardando a sinistra si ottiene

$$\underline{Q}_{CB} = \begin{bmatrix} N(x) \\ T(x) \\ M(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_C - H_A \\ V_A \\ V_A(l+x) - H_C h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6ql^2}{h} - \left(\frac{4ql^2}{h} - F \right) \\ 2ql \\ 2ql(l+x) - \frac{6ql^2}{h} \end{bmatrix}; \quad 0 \leq x \leq 2l$$

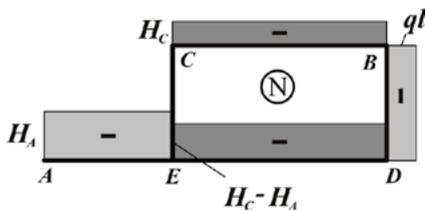


Fig. 36.12

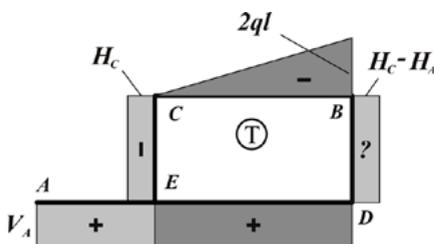


Fig. 37.12

Cerchiamo di disegnare i vari diagrammi sfruttando sia le funzioni che abbiamo già calcolato, che le informazioni a carattere generale che abbiamo definito nei capitoli precedenti.

Lo *sforzo normale* è sicuramente costante in tutti i tratti ($q_o(x)=0$). Prendendo i valori dalle varie funzioni $N(x)$ il diagramma è quello mostrato in Fig. 36.12.

Lo *sforzo di taglio* è costante in tutti i tratti tranne in **CB** dove deve essere ad andamento lineare. Prendendo i valori dalle varie funzioni $T(x)$ e calcolando, per il tratto **CB**, i due valori agli estremi, per $x=0$ e per $x=2l$, si ottiene il diagramma mostrato in Fig. 37.12. C'è da sottolineare che, poiché nella sezione **C** del tratto **CB** è applicato un carrello con piano di scorrimento ortogonale all'asse, già sappiamo che in questa sezione il taglio deve essere nullo.

Il *momento flettente* è lineare in tutti i tratti tranne in **CB** dove deve essere parabolico. Sappiamo, inoltre, che il momento nelle cerniere **C** e **D** deve essere nullo, che la parabola nel tratto **CB** deve avere la concavità rivolta verso l'alto ed un punto di stazionarietà in **C** e che in ciascun nodo la somma dei momenti deve essere nulla. In particolare, nei nodi dove convergono due sole aste, i momenti devono essere uguali e opposti, quindi ottenuti graficamente per ribaltamento *esterno-esterno* o *interno-interno*. Poiché il taglio nella sezione **E** del tratto **AE** e nella medesima sezione del tratto **ED** non presenta alcun salto, non vi deve essere alcuna angolosità nel momento: le rette che delimitano il diagramma di $M(x)$ nei tratti **AE** e **ED** devono essere parallele.

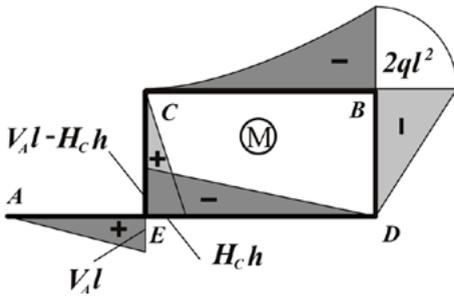


Fig. 38.12

Prendendo in esame anche i valori che si ottengono dalle varie funzioni $M(x)$, il diagramma è quello mostrato in Fig. 38.12.

Nel seguito è riportata la parte conclusiva dell'algorithmo per il calcolo delle reazioni vincolari in presenza di campi chiusi

Il seguito è riportata la parte conclusiva dell'algorithmo per il calcolo delle reazioni vincolari in presenza di campi chiusi

