

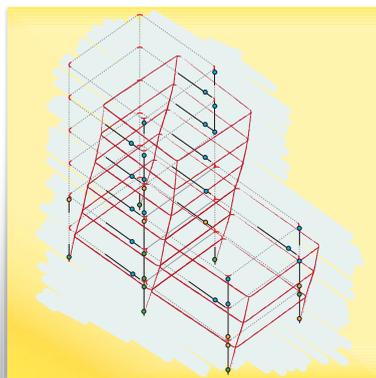
Gianni Michele De Gaetanis

# PUSHOVER

## DALLA TEORIA ALLA PRATICA

**APPROCCIO NORMATIVO, BASI TEORICHE, IMPLEMENTAZIONI  
DEL METODO PUSHOVER, CURVE DI CAPACITÀ, CARATTERISTICHE  
DEI MATERIALI, ELEMENTI STRUTTURALI**

SECONDO LE NTC, SUCCESSIVE MODIFICHE E INTEGRAZIONI  
E CIRCOLARI ESPLICATIVE



### SOFTWARE INCLUSO

**Glossario** (principali termini tecnico-normativi), **F.A.Q.** (domande e risposte sui principali argomenti),  
**Test iniziale** (verifica della formazione di base), **Test finale** (verifica dei concetti analizzati)



**GRAFILL**

<b>PREFAZIONE</b> .....	p	1	<b>Indice</b>
<b>INDICE ANALITICO</b> .....	"	3	
<b>ELENCO DEI SIMBOLI</b> .....	"	5	
<b>ANALISI SISMICA:</b>			
<b>L'APPROCCIO NORMATIVO DELLE NTC</b> .....	"	9	
Generalità sull'analisi sismica e nozioni preliminari.....	"	11	
Analisi lineare statica.....	"	13	
Analisi lineare dinamica.....	"	15	
Nota teorica: dinamica di un oscillatore.....	"	15	
Sistema 1GDL.....	"	15	
Sistema 2GDL.....	"	21	
Sistema nGDL.....	"	23	
Metodo secondo norma.....	"	32	
Analisi non lineare statica (pushover).....	"	34	
Analisi non lineare dinamica.....	"	35	
Criterio di utilizzo dei vari tipi di analisi.....	"	36	
Caratteristiche dei materiali e delle costruzioni.....	"	37	
Regolarità.....	"	37	
Regolarità in pianta.....	"	37	
Regolarità in altezza.....	"	38	
Duttilità.....	"	39	
Duttilità del materiale.....	"	40	
Duttilità locale.....	"	42	
Duttilità strutturale.....	"	45	
Riferimenti normativi e bibliografici.....	"	49	
<b>ANALISI NON LINEARE STATICA:</b>			
<b>BASI TEORICHE DEL METODO PUSHOVER</b> .....	"	51	
Introduzione.....	"	53	
Fondamenti teorici e obiettivi dell'analisi pushover.....	"	58	
Basi dell'analisi.....	"	59	
Equazioni del moto.....	"	59	
Analisi a profilo di spostamenti imposto.....	"	60	
Analisi a profilo di forze imposto.....	"	62	
Conversione nGDI-1GDL.....	"	63	
Curva di capacità e linearizzazioni.....	"	66	
Curva di capacità.....	"	66	
Linearizzazione della curva di capacità.....	"	68	
Approccio delle NTC.....	"	70	
Riferimenti normativi e bibliografici.....	"	74	

<b>APPLICAZIONE DEL METODO PUSHOVER .....</b>	<b>p.</b>	<b>75</b>
Introduzione .....	"	77
Profili di carico.....	"	77
Tipologie .....	"	77
Profili invarianti.....	"	77
Approccio normativo .....	"	79
Metodi dell'analisi pushover .....	"	81
Inquadramento del problema .....	"	81
Implementazione del metodo.....	"	81
Metodo CSM .....	"	83
Riferimenti normativi e bibliografici .....	"	88
<b>CARATTERISTICHE DELLE STRUTTURE: CENNI .....</b>	<b>"</b>	<b>89</b>
Introduzione .....	"	91
Strutture di calcestruzzo: modellazione .....	"	91
Materiali e sezioni .....	"	91
Calcestruzzo .....	"	91
Acciaio .....	"	92
Sezioni .....	"	92
Elementi strutturali .....	"	93
Orizzontamenti rigidi e/o flessibili .....	"	94
Nodi .....	"	95
Travi e pilastri .....	"	95
Pareti .....	"	96
Riferimenti normativi e bibliografici .....	"	97
<b>ESEMPI APPLICATIVI .....</b>	<b>"</b>	<b>99</b>
Premessa .....	"	101
<b>Esempio 1</b>		
Determinazione dei profili di carico per l'analisi pushover .....	"	101
<b>Esempio 2</b>		
Costruzione della curva bilineare di una curva di capacità 1GDL incrudente hardening .....	"	104
<b>Esempio 3</b>		
Costruzione della curva bilineare di una curva di capacità 1GDL incrudente softening .....	"	108
<b>Esempio 4</b>		
Costruzione della curva bilineare di una curva di capacità nGDL secondo le NTC .....	"	112
<b>Esempio 5</b>		
Costruzione dello spettro di domanda nel piano ADRS.....	"	117

---

<b>INSTALLAZIONE DEL SOFTWARE INCLUSO</b> .....	"	121
Note sul software incluso.....	"	123
Requisiti hardware e software .....	"	123
Download del software e richiesta della password di attivazione .....	"	123
Installazione ed attivazione del software .....	"	123

Il metodo pushover viene proposto quale il criterio risolutivo di ogni problema, sia in termini di verifica di strutture esistenti, sia in termini di progettazione ex novo.

Se da un lato è vero che il metodo è in grado di indagare sul comportamento strutturale in condizioni post-elastiche, altresì, il metodo si basa su ipotesi non del tutto verificate le quali, secondo gli esperti del settore, consentono comunque previsioni attendibili: è ovvio che per un ingegnere tale posizione non può essere accettabile.

Infatti, non risulta ragionevole ritenere che, sulla base di ipotesi non del tutto verificate, non costanti durante l'evoluzione temporale dell'evento sismico, i risultati siano ragionevolmente descrittivi della evoluzione del comportamento strutturale.

L'analisi pushover, nel complesso, si presenta molto articolata e richiede un impegno computazionale importante: è necessario ricorrere ad un software per poter affrontare e risolvere i problemi.

Tuttavia, se ci si rivolge al mondo del software si scopre come i diversi prodotti in commercio sono, sostanzialmente, concordanti in campo elastico ma, in campo plastico, evidenziano importanti differenze, in alcuni casi notevoli.

Lo studio condotto nel testo ha quale obiettivo inquadrare il problema dal punto di vista fisico-matematico e fornire le informazioni grazie alle quali il progettista possa essere guidato nella progettazione e nella valutazione dei risultati del calcolo.

Una tale valutazione è possibile, ovviamente, solo conoscendo adeguatamente le procedure di calcolo e maturando una adeguata sensibilità nell'analisi dei dati numerici.

Aprile 2015

	<b>Indice analitico</b>
<b>A</b>	
Acciaio .....	p. 92
Analisi a profilo di forze imposto .....	" 62
Analisi a profilo di spostamenti imposto .....	" 60
Analisi lineare dinamica .....	" 15
Analisi lineare statica .....	" 13
Analisi non lineare dinamica .....	" 35
Analisi non lineare statica (pushover).....	" 34
<b>C</b>	
Calcestruzzo .....	" 91
Conversione nGDI-1GDL .....	" 63
Curva di capacità .....	" 66
<b>D</b>	
Duttilità del materiale .....	" 40
Duttilità locale .....	" 42
Duttilità strutturale .....	" 45
Duttilità .....	" 39
<b>E</b>	
Elementi strutturali .....	" 93
<b>M</b>	
Materiali .....	" 91
Metodo CSM .....	" 83
<b>N</b>	
Nodi .....	" 95
<b>O</b>	
Orizzontamenti rigidi e/o flessibili .....	" 94
<b>P</b>	
Pareti .....	" 96
<b>R</b>	
Regolarità in altezza .....	" 38
Regolarità in pianta .....	" 37
Regolarità .....	" 37
<b>S</b>	
Sezioni .....	" 92
Sistema 1GDL .....	" 15
Sistema 2GDL .....	" 21
Sistema nGDL .....	" 23
Strutture di calcestruzzo: modellazione .....	" 91
<b>T</b>	
Travi e pilastri .....	" 95

---

$\{\Phi\}$	Vettore delle forme modali
$\delta$	Fattore per valutazione degli effetti torsionali accidentali
$\lambda$	Aliquota di massa partecipante
$\mu$	Duttilità
$\mu_c$	Duttilità in curvatura
$\omega$	Pulsazione naturale
$\xi$	Smorzamento relativo a quello critico
$\chi_u$	Curvatura di una sezione
$\chi_u$	Curvatura ultima
$\chi_s$	Curvatura di snervamento
$\chi_f$	Curvatura di prima fessurazione
A	Costante
a	Accelerazione
a(t)	Accelerazione in funzione del tempo t
a <sub>m</sub>	Accelerazione della massa m
a <sub>terr</sub> (t)	Accelerazione del terreno in funzione del tempo t
B	Costante
c	Viscosità
c <sub>1</sub>	Viscosità asta 1
C <sub>1</sub>	Fattore di calcolo di T <sub>1</sub> Costante di calcolo
c <sub>2</sub>	Viscosità asta 2
C <sub>2</sub>	Costante di calcolo
d	Deformazione Spostamento
d <sub>e</sub>	Deformazione elastica al limite dello snervamento
d <sub>el</sub>	Deformazione elastica a rottura
d <sub>u</sub>	Deformazione ultima a rottura
E	Combinazione probabilistica dei modi di vibrare

**Elenco  
dei simboli**

$F$	Forza
$F$	Forza
$F_1$	Forza associata alla massa 1
$F_{11}$	Forza associata alla massa 1 e dovuta allo spostamento $x_1(t)$
$F_{12}$	Forza associata alla massa 1 e dovuta allo spostamento $x_2(t)$
$F_2$	Forza associata alla massa 2
$F_{21}$	Forza associata alla massa 2 e dovuta allo spostamento $x_1(t)$
$F_{22}$	Forza associata alla massa 2 e dovuta allo spostamento $x_2(t)$
$F_c$	Forza dissipativa viscosa
$F_e$	Forza elastica al limite dello snervamento
$F_{el}$	Forza elastica a rottura
$F_i$	Forza statica equivalente applicata alla massa $i$ -esima Generica forza $i$ -esima
$F_{in}$	Forza di inerzia
$F_k$	Forza elastica di richiamo
$F_{max}$	Forza massima
$g$	Accelerazione di gravità Coefficiente di partecipazione
$H$	Altezza di una costruzione dal piano di fondazione
$k$	Rigidezza
$k_1$	Rigidezza asta 1
$k_2$	Rigidezza asta 2
$L_e$	Distanza tra due elementi resistenti più lontani, misurata perpendicolarmente alla direzione dell'azione sismica considerata
$m$	Massa
$M$	Momento
$m_1$	Massa 1
$m_2$	Massa 2
$M_f$	Momento di prima fessurazione
$M_s$	Momento di snervamento

$M_u$	Momento ultimo
$p$	Esponente
$P_0$	Costante di calcolo di una forzante
$q$	Fattore di struttura
$S_d(T_1)$	Ordinata dello spettro di risposta di progetto corrispondente al periodo $T_1$
$t$	Tempo
$T_1$	Periodo del modo principale di vibrare nella direzione considerata
$T_b$	Taglio alla base
$T_C$	Periodo corrispondente all'inizio del tratto a velocità costante
$T_D$	Periodo corrispondente all'inizio del tratto a spostamento costante
$v_0$	Velocità iniziale
$W_i$	Massa del piano i-esimo
$x$	La distanza dell'elemento resistente verticale dal baricentro geometrico di piano misurata perpendicolarmente alla direzione dell'azione sismica considerata
$x(t)$	Spostamento funzione del tempo $t$
$x_0$	Spostamento iniziale
$x_0(t)$	Posizione della base al tempo $t$
$x_1(t)$	Spostamento della massa 1 funzione del tempo $t$
$x_2(t)$	Spostamento della massa 2 funzione del tempo $t$
$x_m(t)$	Spostamento della massa $m$ al tempo $t$
$z_i, z_j$	Quota del piano i-esimo, j-esimo

---

## **ESEMPI APPLICATIVI**

Di seguito si propongono alcuni esempi applicativi. Richiedendo l'analisi pushover, in genere, impegni computazionali importanti e lunghi tempi di esecuzione, gli esercizi sono riportati con un grado di difficoltà gradualmente crescente e gli argomenti trattati sono limitati a ciò che può essere affrontato manualmente.

## Premessa

Si determinino i profili di carico orizzontale da utilizzare per l'analisi pushover sapendo che si tratta di una struttura piana di calcestruzzo, a tre orizzontamenti, caratterizzata da una matrice di massa [M] e deformata del primo modo di vibrare come di seguito esplicitato:

## Esempio 1: determinazione dei profili di carico per l'analisi pushover

$$[M] = \begin{bmatrix} 5012 & 0 & 0 \\ 0 & 5147 & 0 \\ 0 & 0 & 5391 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\varphi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.41 \end{Bmatrix}_1$$

## RISOLUZIONE

I profili di carico da utilizzare per l'analisi non lineare statica sono di due tipi e precisamente (distribuzioni Gruppo 1 e 2):

- distribuzione di forze proporzionali alle masse della struttura;
- distribuzione di forze proporzionali al primo modo di vibrare della struttura.

Innanzitutto si verifichi che il modo di vibrare fondamentale nella direzione considerata sia caratterizzato da una partecipazione di massa non inferiore al 75%. Il fattore di partecipazione è

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\{\varphi\}_1^T [M] \{I\}}{\{\varphi\}_1^T [M] \{\varphi\}_1} = \frac{\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.41 \end{Bmatrix}_1^T \begin{bmatrix} 5012 & 0 & 0 \\ 0 & 5147 & 0 \\ 0 & 0 & 5391 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.41 \end{Bmatrix}_1^T \begin{bmatrix} 5012 & 0 & 0 \\ 0 & 5147 & 0 \\ 0 & 0 & 5391 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.00 \\ 0.75 \\ 0.41 \end{Bmatrix}_1} = \\ &= \frac{5012.00 \cdot 1.00 + 5147.00 \cdot 0.75 + 5391.00 \cdot 0.41}{5012.00 \cdot 1.00 + 3860.25 \cdot 0.75 + 2210.00 \cdot 0.41} = \\ &= \frac{11082.25}{8813.29} = 1.26 \end{aligned}$$

Nota il fattore di partecipazione si può calcolare a massa partecipante secondo la:

$$M_{p,1} = \Gamma_1 \cdot \{\varphi\}_1^T [M] \{I\} = 1.26 \cdot 11082.25 \text{ daN} = 13963.63 \text{ daN}$$

Essendo la massa totale pari a:

$$M_t = \sum_{i=1}^3 m_i = 5012.00 + 5147.00 + 5391.00 \text{ daN} = 15550.00 \text{ daN}$$

risulta:

$$\frac{M_{p,1}}{M_t} = \frac{13963.63}{15550.00} \cdot 100 = 89.80 \%$$

Verificato che la massa partecipante relativa al primo modo di vibrare è superiore al 75% si procede a determinare i profili di carico.

In definitiva si tratta di definire i fattori del vettore:

$$\{F\} = \beta \{f\}$$

con:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

essendo  $\{f\}$  funzione di forma e  $\beta$  scalare funzione del tempo. In definitiva si tratta di definire il fattore di forma.

Per la distribuzione di forze proporzionali alle masse della struttura è necessario considerare la quota parte di massa di ogni piano: tale fattori definiscono la funzione di forma  $\{f\}$ .

Ossia:

$$f_i = \frac{m_i}{M_t}$$

Quindi:

Distribuzione di forze proporzionali alle masse		
Piano	Massa $m_i$ (daN)	$f_i$
3	5012.00	0.322
2	5147.00	0.331
1	5391.00	0.347
<b>Totale</b>	<b>15550.00</b>	<b>1.00</b>

Infine:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} 0.322 \\ 0.331 \\ 0.347 \end{Bmatrix}$$

Per la distribuzione di forze proporzionale al primo modo di vibrare della struttura è necessario considerare la quota parte di massa di ogni piano per la deformata modale: tale prodotto definisce la funzione di forma  $\{f\}$ .

Ossia:

$$f_i = \frac{m_i \phi_{i,1}}{\sum_{i=1}^3 m_i \phi_{i,1}}$$

Quindi:

Distribuzione di forze proporzionali al primo modo				
Piano	Massa $m_i$ (daN)	$\phi_{i,1}$	$m_i \phi_{i,1}$	$f_i$
3	5012.00	1.00	5012.00	0.452
2	5147.00	0.75	3860.25	0.348
1	5391.00	0.41	2210.31	0.200
<b>Totale</b>	<b>15550.00</b>	<b>-</b>	<b>11082.56</b>	<b>1.00</b>

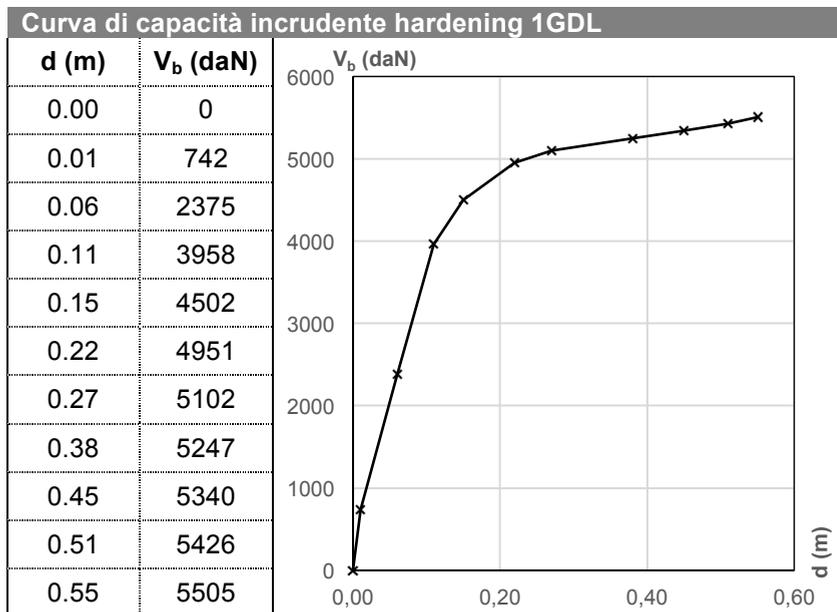
Infine:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} 0.452 \\ 0.348 \\ 0.200 \end{Bmatrix}$$

Ovviamente nell'applicare i sistemi di forze, l'evoluzione temporale è definita dallo scalare  $\beta$ : in ogni caso il valore di partenza di  $\beta$  è tale da avere un apprezzabile deformazione elastica già in partenza per cui, in genere, i valori di start di  $\beta$  sono nell'ordine di  $10^3$ .

**Esempio 2:  
costruzione  
della curva  
bilineare di  
una curva di  
capacità 1GDL  
incrudente  
hardening**

Si determini la curva bilineare relativa alla curva di capacità incrudente hardening di una struttura 1GDL, riportata nella tabella seguente, assumendo quale fattore di incrudimento  $p = 0.06$ .



**RISOLUZIONE**

Il primo elemento da affrontare nello studio della curva bilineare è legato alla caratterizzazione del tratto elastico: per fare ciò si considera la tangente alla curva di capacità nell'origine.

Approssimando la curva di capacità attraverso una curva di regressione di 4° passante per l'origine risulta (coefficiente di correlazione = 0.997):

$$V_b \approx -232365 \cdot d^4 + 370025 \cdot d^3 - 213784 \cdot d^2 + 54297 \cdot d$$

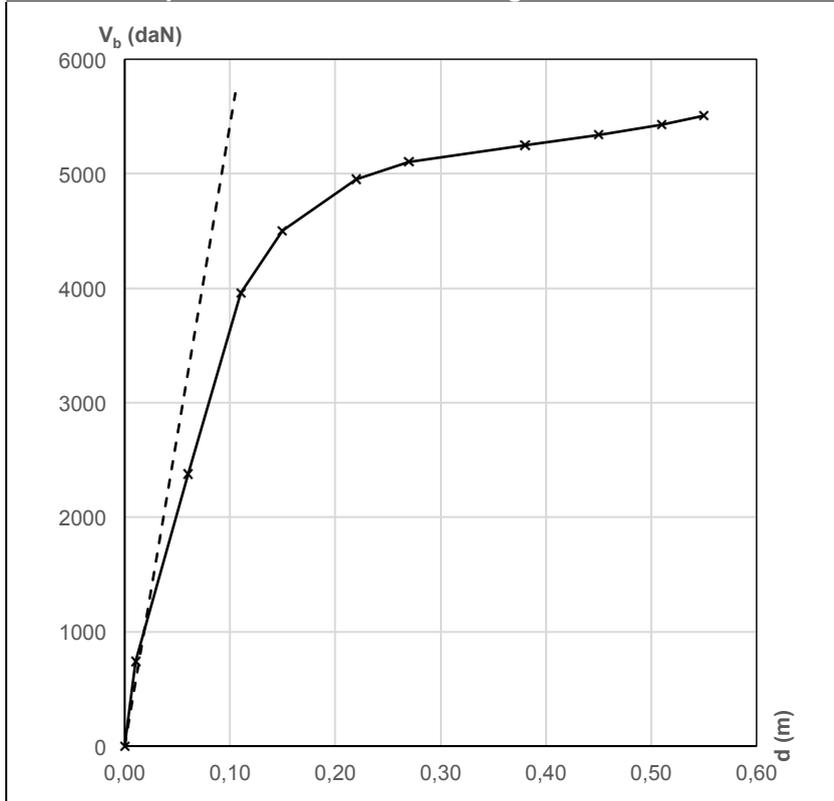
Derivando rispetto a d:

$$k^* = \frac{d(V_b)}{d(d)} = -929460 \cdot d^3 + 810075 \cdot d^2 - 427568 \cdot d + 54297$$

e calcolando la derivata in  $d = 0$  risulta  $k^* = 54297$  daN/m. Si assume lo stesso  $d^*_u$  della curva 1GDL e rigidezza del ramo plastico pari a  $p \cdot k^* = 0.06 \cdot 54297$  daN/m = 3257.82 daN/m.

Quindi, il ramo elastico ha pendenza  $k^*$ , come rappresentato nell'immagine seguente (Cfr. immagine successiva – retta tratteggiata passante per l'origine). Al fine della definizione del limite elastico si considera il bilancio di energia fra la bilineare e la curva 1GDL data.

Curva di capacità incrudente hardening 1GDL



Quindi:

$$\begin{aligned}
 E_{bil} &= \frac{F_y^* \cdot d_y^*}{2} + \frac{F_u^* + F_y^*}{2} (d_u^* - d_y^*) = \frac{k^* d_y^* \cdot d_y^*}{2} + \\
 &+ \frac{k^* d_y^* + p k^* (d_u^* - d_y^*) + k^* d_y^*}{2} (d_u^* - d_y^*) = \\
 &= \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 + 2d_y^* (d_u^* - d_y^*) + p (d_u^* - d_y^*)^2 \right] = \\
 &= \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 + 2d_y^* d_u^* - 2(d_y^*)^2 + p (d_u^*)^2 - 2pd_y^* d_u^* + p (d_y^*)^2 \right] = \\
 &= \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 (p-1) + 2d_y^* d_u^* (1-p) + p (d_u^*)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Dall'eguaglianza  $E_{bil} = E_{1GDL}$  risulta:

$$E_{bil} = \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 (p-1) + 2d_y^* d_u^* (1-p) + p(d_u^*)^2 \right] = E_{1GDL}$$

da cui:

$$(p-1)(d_y^*)^2 + 2d_y^* d_u^* (1-p) + p(d_u^*)^2 - \frac{2E_{1GDL}}{k^*} = 0$$

cioè:

$$(d_y^*)^2 - 2d_y^* d_u^* + \frac{p}{p-1} (d_u^*)^2 - \frac{2E_{1GDL}}{k^*(p-1)} = 0$$

ossia:

$$d_y^* = d_u^* \pm \sqrt{(d_u^*)^2 - \frac{p}{p-1} (d_u^*)^2 - \frac{2E_{1GDL}}{k^*(1-p)}}$$

Nella precedente scrittura risulta non calcolata solo l'energia associata alla curva di capacità del sistema 1GDL.

Quindi, facendo riferimento ai punti della curva di capacità equivalente, si calcola (quale sommatoria di triangoli e trapezi):

$$E_{1GDL} = \frac{F_i \cdot d_i}{2} + \sum_{i=2}^{11} \frac{F_{i+1} + F_i}{2} (d_{i+1} - d_i)$$

Curva di capacità equivalente 1GDL			
Punto	d (m)	F (daN)	E parz. (daJ)
1	0.00	0	-
2	0.01	742	3.71
3	0.06	2375	77.93
4	0.11	3958	158.33
5	0.15	4502	169.20
6	0.22	4951	330.86
7	0.27	5102	251.33
8	0.38	5247	569.20
9	0.45	5340	370.55
10	0.51	5426	322.98
11	0.55	5505	218.62
<b>E<sub>1GDL</sub> totale</b>			<b>2472.68</b>

Quindi:

$$d_y^* = \underbrace{0.55}_{=d_u^*} \pm \sqrt{0.3025 + \frac{0.06}{1.00 - 0.06} \cdot 0.3025 - \frac{2 \cdot 2472.68}{54297 \cdot (1.00 - 0.6)}}$$

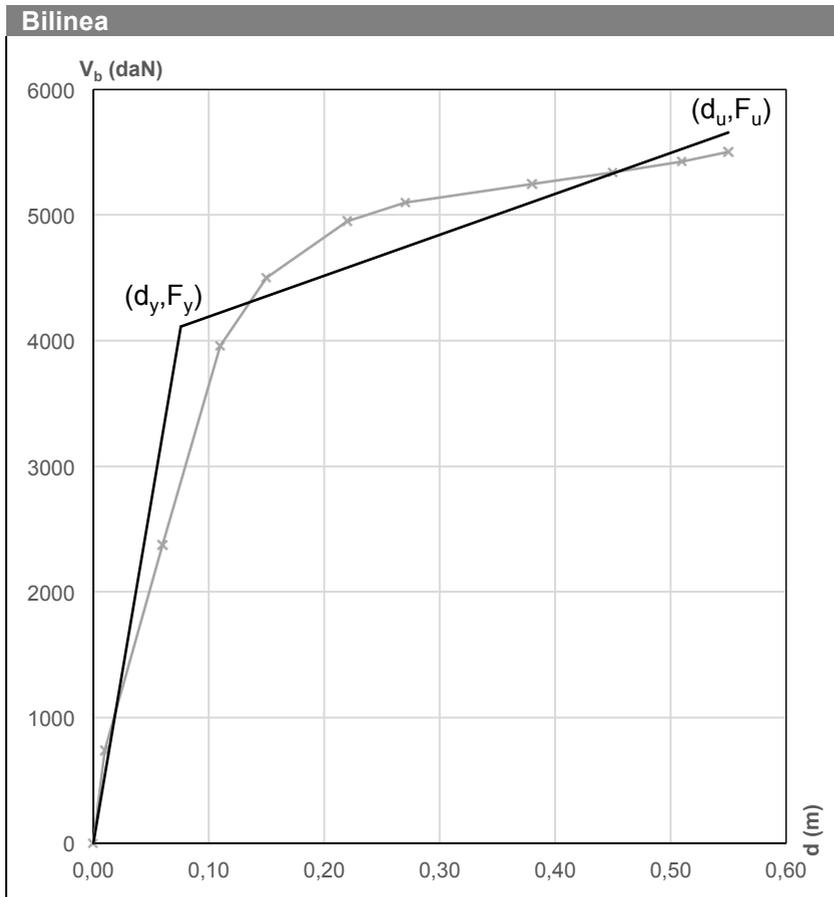
$$= \sqrt{(d_u^*)^2 - \frac{p}{p-1} (d_u^*)^2 - \frac{2E_{IGDL}}{k^2(1-p)}}$$

$$= 0.55 \pm \sqrt{0.3025 + 0.0193 - 0.0969} = \begin{cases} d_{y,1}^* = 0.55 + 0.474 \text{ m} = 1.024 \text{ m} \\ d_{y,2}^* = 0.55 - 0.474 \text{ m} = 0.076 \text{ m} \end{cases}$$

Escludendo la radice maggiore in quanto, maggiore del massimo spostamento, priva di significato fisico si considera la sola radice minore. Ossia:

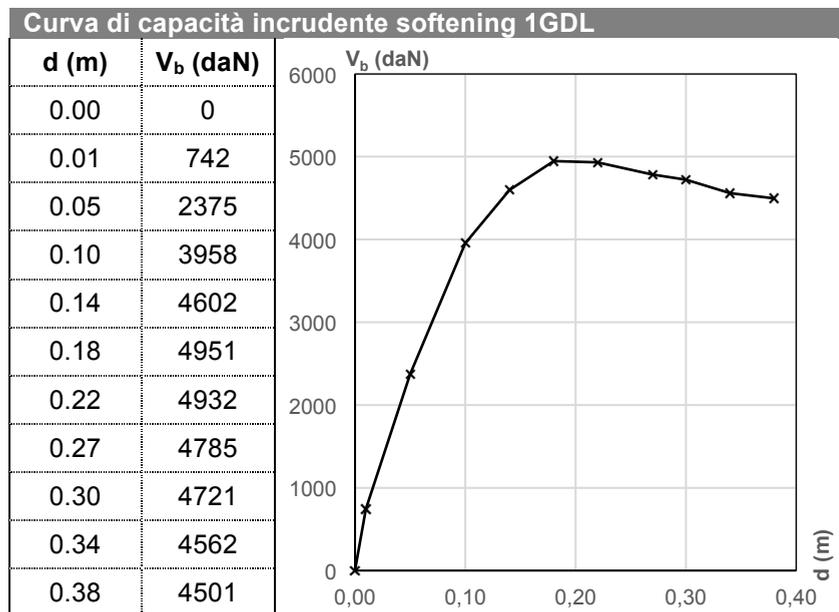
$$d_y^* = 0.076 \text{ m}$$

Infine, si può considerare la bilinea:



**Esempio 3:  
costruzione  
della curva  
bilineare di  
una curva di  
capacità 1GDL  
incrudente  
softening**

Si determini la curva bilineare relativa alla curva di capacità incrudente softening di una struttura 1GDL, riportata nella tabella seguente, assumendo quale fattore di incrudimento  $p = -0.03$ .



**RISOLUZIONE**

Si procede in modo analogo al caso precedente. Il primo elemento da affrontare nello studio della curva bilineare è legato alla caratterizzazione del tratto elastico: per fare ciò si considera la tangente alla curva di capacità nell'origine.

Approssimando la curva di capacità attraverso una curva di regressione di 4° passante per l'origine risulta (coefficiente di correlazione = 0.999):

$$V_b \approx -113357 \cdot d^4 + 344213 \cdot d^3 - 241944 \cdot d^2 + 60315 \cdot d$$

Derivando rispetto a d:

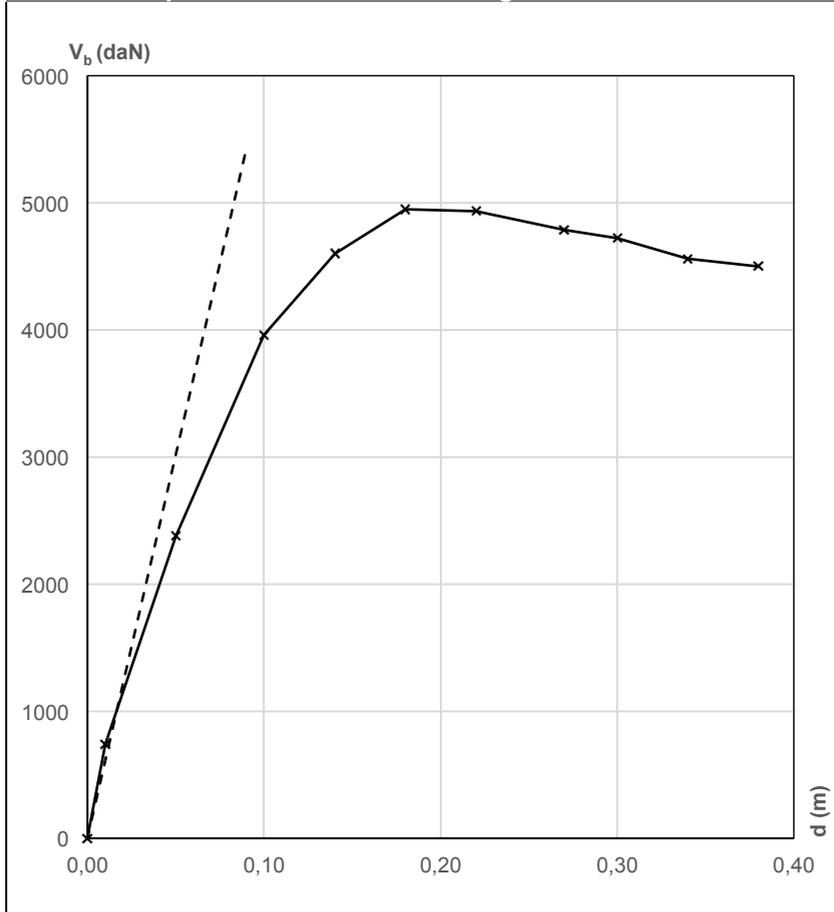
$$k^* = \frac{d(V_b)}{d(d)} = -113357 \cdot d^3 + 344213 \cdot d^2 - 241944 \cdot d + 60315$$

e calcolando la derivata in  $d = 0$  risulta  $k^* = 60315$  daN/m. Si assume lo stesso  $d^*_u$  della curva 1GDL e rigidezza del ramo plastico pari a  $p \cdot k^* = -0.03 \cdot 60315$  daN/m = 1809.45 daN/m.

Quindi, il ramo elastico ha pendenza  $k^*$ , come rappresentato nell'immagine seguente (Cfr. immagine successiva – retta tratteggiata passante per l'origine).

Al fine della definizione del limite elastico si considera il bilancio di energia fra la bilineare e la curva 1GDL data.

### Curva di capacità incrudente softening 1GDL



Quindi:

$$\begin{aligned}
 E_{bil} &= \frac{F_y^* \cdot d_y^*}{2} + \frac{F_u^* + F_y^*}{2} (d_u^* - d_y^*) = \frac{k^* d_y^* \cdot d_y^*}{2} + \\
 &+ \frac{k^* d_y^* + p k^* (d_u^* - d_y^*) + k^* d_y^*}{2} (d_u^* - d_y^*) = \\
 &= \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 + 2d_y^* (d_u^* - d_y^*) + p (d_u^* - d_y^*)^2 \right] =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 + 2d_y^*d_u^* - 2(d_y^*)^2 + p(d_u^*)^2 - 2pd_y^*d_u^* + p(d_y^*)^2 \right] =$$

$$= \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 (p-1) + 2d_y^*d_u^* (1-p) + p(d_u^*)^2 \right]$$

Dall'eguaglianza  $E_{bil} = E_{1GDL}$  risulta:

$$E_{bil} = \frac{k^*}{2} \left[ (d_y^*)^2 (p-1) + 2d_y^*d_u^* (1-p) + p(d_u^*)^2 \right] = E_{1GDL}$$

da cui:

$$(p-1)(d_y^*)^2 + 2d_y^*d_u^*(1-p) + p(d_u^*)^2 - \frac{2E_{1GDL}}{k^*} = 0$$

cioè:

$$(d_y^*)^2 - 2d_y^*d_u^* + \frac{p}{p-1}(d_u^*)^2 - \frac{2E_{1GDL}}{k^*(p-1)} = 0$$

ossia:

$$d_y^* = d_u^* \pm \sqrt{(d_u^*)^2 - \frac{p}{p-1}(d_u^*)^2 - \frac{2E_{1GDL}}{k^*(1-p)}}$$

Nella precedente scrittura risulta non calcolata solo l'energia associata alla curva di capacità del sistema 1GDL.

Quindi, facendo riferimento ai punti della curva di capacità equivalente, si calcola (quale sommatoria di triangoli e trapezi):

$$E_{1GDL} = \frac{F_i \cdot d_i}{2} + \sum_{i=2}^{11} \frac{F_{i+1} + F_i}{2} (d_{i+1} - d_i)$$

Curva di capacità equivalente 1GDL			
Punto	d (m)	F (daN)	E parz. (daJ)
1	0.00	0	-
2	0.01	742	3.71
3	0.05	2375	62.34
4	0.10	3958	158.33
5	0.14	4602	171.20
6	0.18	4951	191.06
7	0.22	4932	197.66
8	0.27	4785	242.93
9	0.30	4721	142.59
10	0.34	4562	185.66
11	0.38	4501	181.26
<b>E<sub>1GDL</sub> totale</b>			<b>1536.73</b>

Quindi:

$$d_y^* = \underbrace{0.38}_{=d_u^*} \pm \sqrt{0.1444 + \frac{-0.03}{1.00+0.03} \cdot 0.1444 - \frac{2 \cdot 1536.73}{60315 \cdot (1.00+0.03)}} =$$

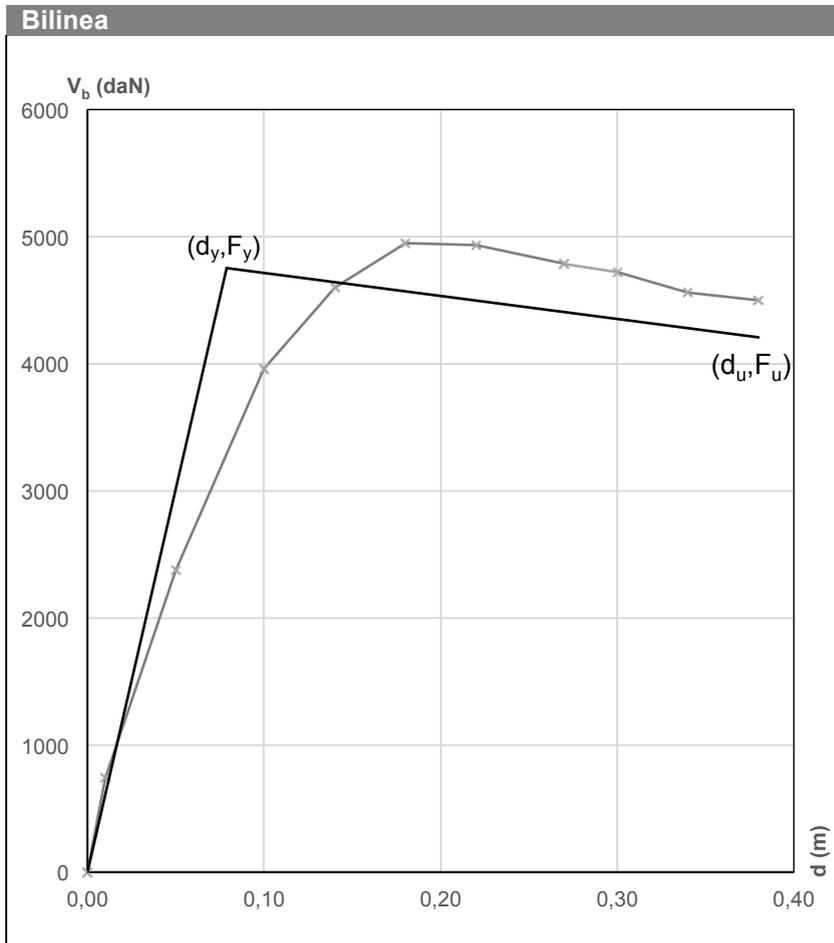
$$= \sqrt{\left(d_u^*\right)^2 \frac{p}{p-1} \left(d_u^*\right)^2 \frac{2E_{1GDL}}{k^*(1-p)}}$$

$$= 0.38 \pm \sqrt{0.1444 - 0.0042 - 0.0495} = 0.38 \pm 0.301 \text{ (m)}$$

Escludendo la radice maggiore in quanto priva di significato fisico si considera la sola radice minore, ossia:

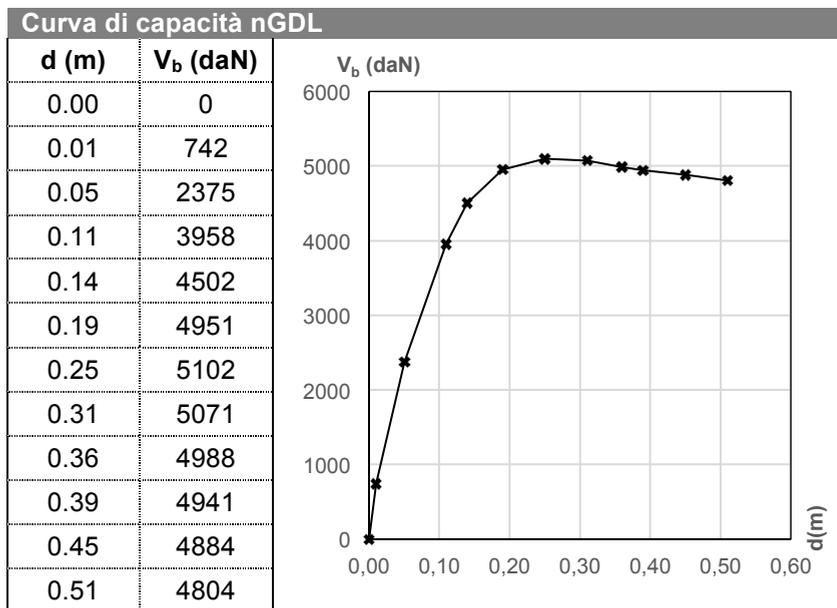
$$d_y^* = 0.38 - 0.301 \text{ (m)} = 0.079 \text{ (m)}$$

Infine, si può considerare la bilinea:



**Esempio 4:**  
**costruzione**  
**della curva**  
**bilineare di**  
**una curva di**  
**capacità nGDL**  
**secondo le**  
**NTC**

Si determini la curva bilineare relativa alla curva di capacità di una struttura reale nGDL, riportata nella tabella seguente, sapendo che il fattore di partecipazione modale  $\Gamma = 1.25$ .



**RISOLUZIONE**

Data la curva di capacità della struttura reale nGDL è necessario definire la curva di capacità equivalente del sistema 1GDL. Secondo le NTC si procede considerando la curva equivalente:

$$F^* = \frac{V_b}{\Gamma} \quad \text{e} \quad d^* = \frac{d_c}{\Gamma}$$

essendo  $\Gamma = 1.25$ .

Quindi, per ogni punto:

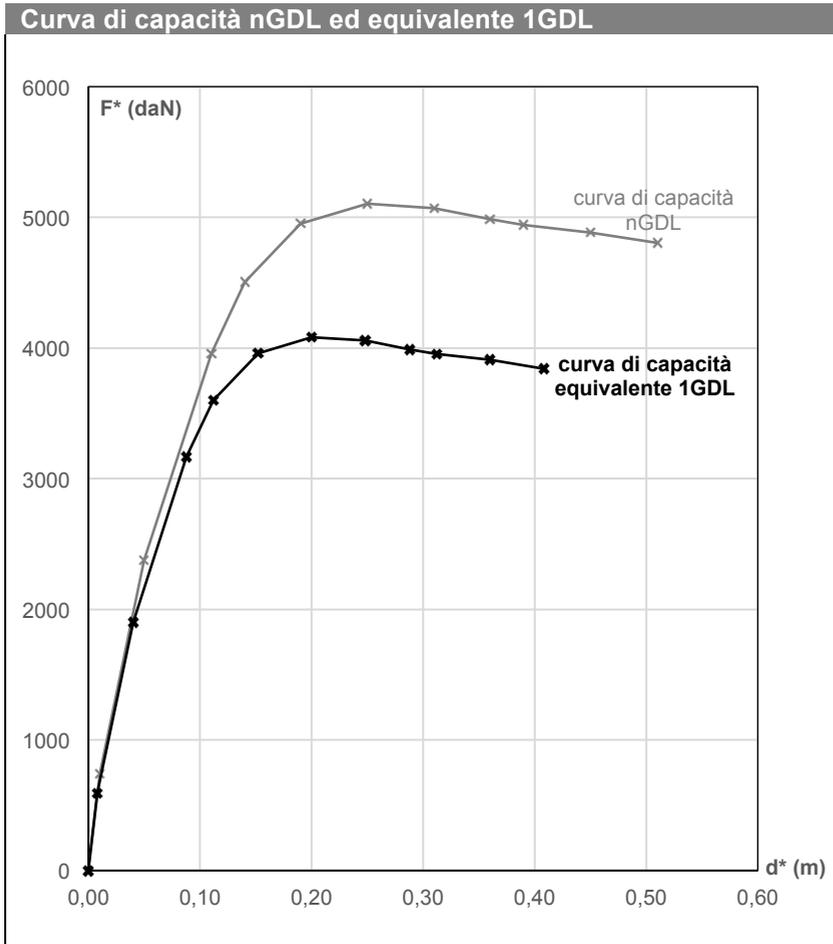
**Curva di capacità equivalente 1GDL**

Punto	d (m)	d* (m)	V <sub>b</sub> (daN)	F* (daN)
1	0.00	0.000	0	0.00
2	0.01	0.008	742	593.60
3	0.05	0.040	2375	1900.00
4	0.11	0.088	3958	3166.40
5	0.14	0.112	4502	3601.60
6	0.19	0.152	4951	3960.80
7	0.25	0.200	5102	4081.60

*continua*

8	0.31	0.248	5071	4056.80
9	0.36	0.288	4988	3990.40
10	0.39	0.312	4941	3952.80
11	0.45	0.360	4884	3907.20
12	0.51	0.408	4804	3843.20

e graficamente:



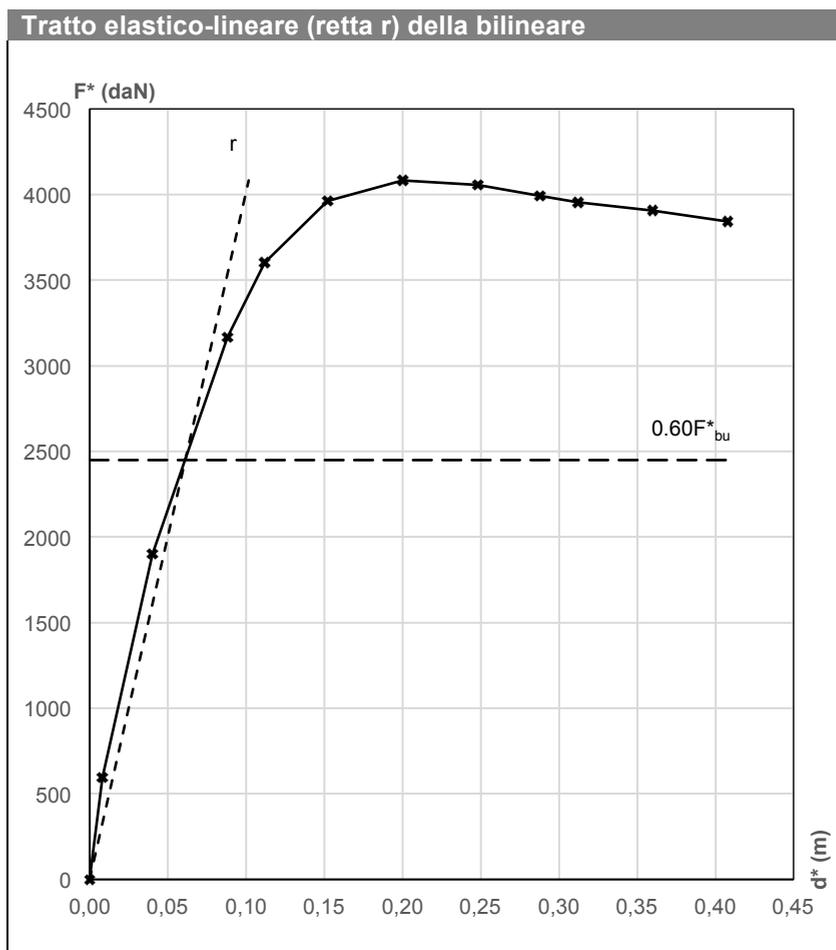
Per definire il ramo elastico della bilineare è necessario considerare l'intersezione della retta con la curva di capacità equivalente in corrispondenza della forza pari al 60% della forza massima. Quindi, essendo il massimo  $F^*_{bu} = 4081.60$  daN, risulta  $0.60 \cdot F^*_{bu} = 2448.96$  daN.

L'ordinata in questione non è presente quale punto esplicito nella tabella della curva di capacità equivalente per cui si procede per in-

terpolazione fra i punti 3 e 4. Calcolando l'ascissa in corrispondenza di tale ordinata risulta:

$$d_{0,6}^* = d_3^* + \frac{0.60 \cdot F_{bu}^* - F_3^*}{F_4^* - F_3^*} (d_4^* - d_3^*) = 0.040 + \frac{2448.96 - 1900.00}{3166.40 - 1900.00} m =$$

$$= 0.040 + \frac{548.96}{2638.33} m = 0.040 + 0.021 = 0.061 m$$



Si procede, quindi, a determinare lo spostamento ultimo  $d_u^*$ . Secondo norma lo spostamento ultimo deve essere determinato per una forza sulla curva di capacità equivalente 1GDL non inferiore allo 85 % della forza massima.

Poiché la forza corrispondente all'estremo della curva di capacità equivalente è 3843.20 daN e il valore massimo è 4081.60 daN, risulta:

$$\frac{3843.20}{4081.60} \cdot 100 \% = 94.16 \%$$

si può assumere direttamente  $d^*_u = 0.408$  m. Per determinare il punto di stato limite elastico, ossia il punto  $(d^*_y; F^*_y)$ , si può procedere in due modi sostanzialmente equivalenti:

- si eguagliano le aree sottese dalla curva di capacità equivalente e della bilinea;
- si calcola la differenza fra le aree eguagliandole a zero.

In generale, risulta più semplice il primo metodo. Infatti, l'area della curva di capacità equivalente 1GDL è calcolata una sola volta per tutte e, in relazione a tale parametro, si calcola  $(d^*_y; F^*_y)$  tramite l'area della bilinea.

In particolare, facendo riferimento ai punti della curva di capacità equivalente, si calcola (quale sommatoria di triangoli e trapezi):

$$E_{eq} = \frac{F_1^* \cdot d_1^*}{2} + \sum_{i=2}^{11} \frac{F_{i-1}^* + F_i^*}{2} (d_{i-1}^* - d_i^*)$$

Curva di capacità equivalente 1GDL			
Punto	$d^*$ (m)	$F^*$ (daN)	E parz. (daJ)
1	0.000	0.00	-
2	0.008	593.60	2.37
3	0.040	1900.00	39.90
4	0.088	3166.40	121.59
5	0.112	3601.60	81.22
6	0.152	3960.80	151.25
7	0.200	4081.60	193.02
8	0.248	4056.80	195.32
9	0.288	3990.40	160.94
10	0.312	3952.80	95.32
11	0.360	3907.20	188.64
12	0.408	3843.20	186.01
<b><math>E_{eq}</math> totale</b>			<b>1415.58</b>

Il calcolo dell'area sottesa dalla bilinea può essere facilmente condotto attraverso la somma di due aliquote: la quota parte riferibile al tratto elastico lineare e la rimanente riferibile al tratto perfettamente plastico.

Quindi:

$$E_{bil} = \frac{F_y^* \cdot d_y^*}{2} + F_y^* (d_u^* - d_y^*)$$

La forza del tratto elastico è legata allo spostamento attraverso la rigidezza elastica,  $k^*$ , facilmente determinabile secondo la:

$$k^* = \frac{F_y^*}{d_y^*} = \frac{0.60 \cdot F_{bu}^*}{d_{0.6}^*} = \frac{2448.96}{0.061} \text{ daN/m} = 40146.88 \text{ daN/m}$$

e quindi:

$$F_y^* = k^* \cdot d_y^*$$

Infine:

$$E_{bil} = \frac{k^* \cdot d_y^* \cdot d_y^*}{2} + k^* \cdot d_y^* (d_u^* - d_y^*) = k^* \cdot d_u^* \cdot d_y^* - \frac{k^*}{2} (d_y^*)^2$$

Dall'eguaglianza  $E_{bil} = E_{eq}$  risulta:

$$E_{bil} = k^* \cdot d_u^* \cdot d_y^* - \frac{k^*}{2} (d_y^*)^2 = E_{eq}$$

da cui:

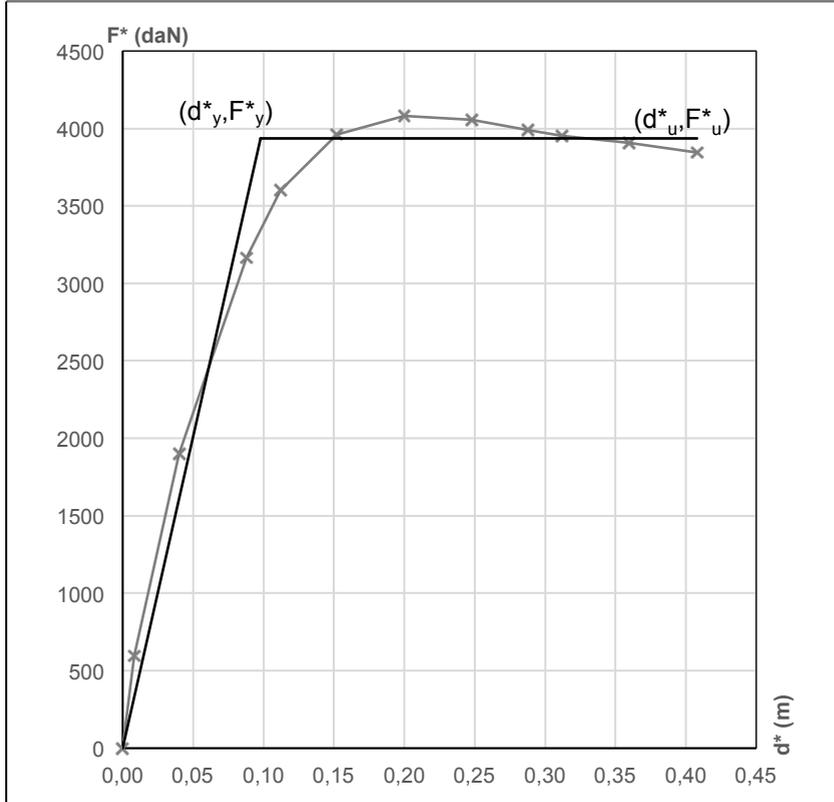
$$\frac{k^*}{2} (d_y^*)^2 - k^* \cdot d_u^* \cdot d_y^* + E_{eq} = 0$$

ossia:

$$\begin{aligned} d_y^* &= d_u^* \pm \sqrt{(d_u^*)^2 - \frac{2E_{eq}}{k^*}} = \\ &= \frac{16379.93 \pm 12435.42}{40146.88} \text{ m} = \begin{cases} 0.718 \text{ m} \\ 0.098 \text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

La radice 0.718 m è priva di significato fisico dovendo essere inferiore allo spostamento ultimo per cui è scartata.

Quindi  $d_y^* = 0.098 \text{ m}$ . Infine, la bilineare è rappresentata nell'immagine seguente (Cfr. immagine pagina successiva).

**Bilineare**

Si determini lo spettro di domanda, in accelerazione orizzontale, nel piano ADRS sapendo che il sito in esame è caratterizzato da una categoria di suolo A, categoria topografica T1, con ( $T_R = 475$  anni)  $a_g = 1.348 \text{ m/s}^2$ ,  $F_0 = 2.47$ ,  $T^*_C = 0.27 \text{ s}$ . Sia lo smorzamento viscoso  $\xi = 5\%$ .

**Esempio 5:**  
**costruzione**  
**dello spettro**  
**di domanda**  
**nel piano**  
**ADRS**

**RISOLUZIONE**

Secondo le NTC (punto 3.2.3.2.1) lo spettro elastico è definito dal seguente prospetto:

Spettro elastico (componente orizzontale)	
Periodo di vibrazione T (s)	Spettro
$0 \leq T < T_B$	$S_e(T) = a_g S \eta F_0 \left[ \frac{T}{T_B} + \frac{1}{\eta F_0} \left( 1 - \frac{T}{T_B} \right) \right]$

*continua*

$T_B \leq T < T_C$	$S_e(T) = a_g S \eta F_0$
$T_C \leq T < T_D$	$S_e(T) = a_g S \eta F_0 \frac{T_C}{T}$
$T \geq T_D$	$S_e(T) = a_g S \eta F_0 \frac{T_C T_D}{T^2}$

con

- $S$ , il fattore funzione della categoria di sottosuolo e delle condizioni topografiche, calcolabile secondo la:

$$S = S_S S_T$$

essendo  $S_S$  il coefficiente di amplificazione stratigrafica e  $S_T$  il coefficiente di amplificazione topografica; per la categoria di sottosuolo in esame, ossia categoria A, la norma prevede  $S_S = 1.00$  e per la categoria topografica T1  $S_T = 1.00$ ; quindi  $S = 1.00$ ;

- $\xi$ , il fattore di smorzamento, è calcolabile secondo la:

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi}}$$

ed essendo  $\xi = 5\%$  si calcola  $\eta = 1.00$ ;

- $T_C$ , periodo corrispondente all'inizio del tratto a velocità costante calcolabile quale prodotto:

$$T_C = C_C \cdot T_C^*$$

con  $C_C$ , per il sito in esame (A), unitario da cui  $T_C = 0.27$  s;

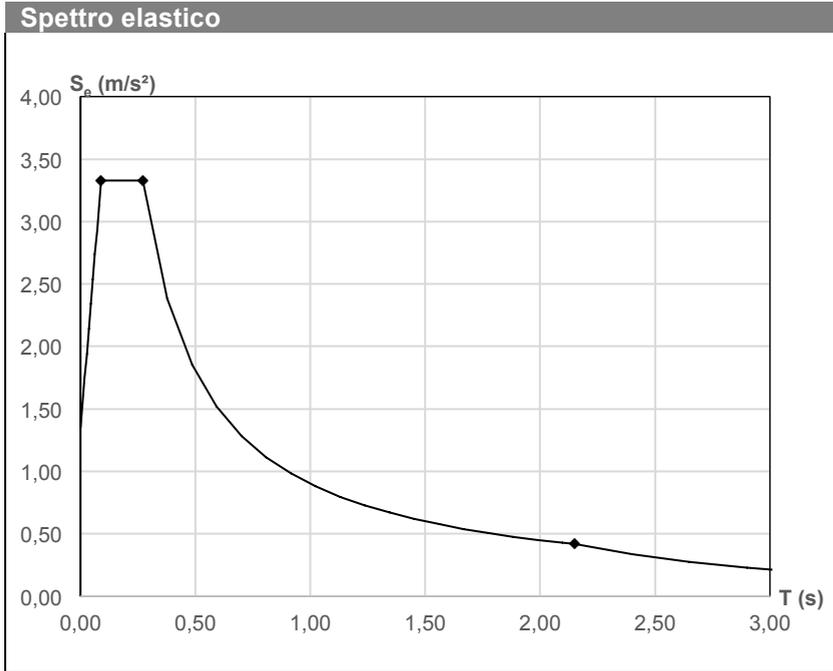
- $T_B$ , periodo corrispondente all'inizio del tratto dello spettro ad accelerazione costante, è calcolabile secondo la:

$$T_B = \frac{T_C}{3} = \frac{0.27}{3} \text{ s} = 0.09 \text{ s}$$

- $T_D$ , periodo corrispondente all'inizio del tratto a spostamento costante calcolabile mediante la:

$$T_D = 4.00 \frac{a_g}{g} + 1.60 \text{ s} = 4.00 \frac{1.348}{9.81} + 1.60 \text{ s} = 2.15 \text{ s}$$

Quindi, lo spettro elastico è:



Per definire lo spettro di domanda nel piano ADRS è sufficiente considerare la curva:

$$DS: (a_D; d_D)$$

con:

$$a_D = S_a \quad \text{e} \quad d_D = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 S_a$$

Per la rappresentazione della curva si consideri l'immagine successiva (Cfr. pagina successiva). Si osservi come l'ultimo tratto sia verticale.

Spettro di domanda nel piano ADRS

