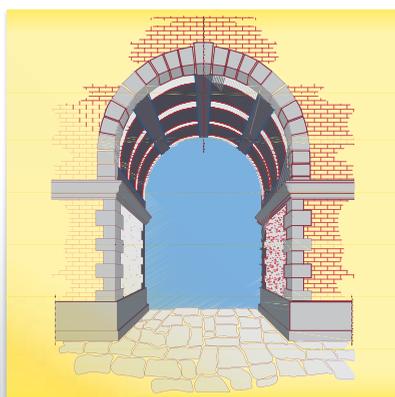


Alberto Pecchenino

LE VOLTE IN MURATURA

ANALISI, MODELLAZIONE E RINFORZO CON FRP

- I materiali compositi
- La muratura: archi e volte
- Modellazione FEM e comportamento strutturale
- Consolidamento e rinforzo con tecnica FRP (CNR-DT 200/2004)
- Esempi di calcolo
- Casi applicativi



SOFTWARE INCLUSO

Glossario (principali termini tecnico-normativi), **F.A.Q.** (domande e risposte sui principali argomenti), **Test iniziale** (verifica della formazione di base), **Test finale** (verifica dei concetti analizzati)



GRAFILL

INDICE

PREFAZIONE	p.	1
RINGRAZIAMENTI	"	2
1. I MATERIALI COMPOSITI	"	3
1.1. Generalità	"	3
1.2. Tecnologie di produzione	"	6
1.2.1. Lo stampaggio a contatto	"	7
1.2.2. La tecnologia a spruzzo	"	8
1.2.3. Bag Molding	"	8
1.2.4. RTM – Resin Transfer Molding	"	9
1.2.5. Il processo di pultrusione	"	10
1.3. Cenni di meccanica nei compositi	"	11
1.4. Le applicazioni in campo edile	"	14
1.4.1. Applicazione su struttura in c.a.	"	15
1.4.2. Applicazione su struttura in legno	"	17
1.4.3. Applicazione su strutture in muratura portante	"	18
2. LA MURATURA	"	20
2.1. Considerazioni generali e classificazione	"	21
2.2. Le malte	"	24
2.2.1. I leganti	"	25
2.2.2. Gli inerti	"	26
2.2.3. L'acqua	"	26
2.3. Le proprietà meccaniche delle murature	"	26
2.3.1. La compressione semplice	"	27
2.3.2. Il taglio	"	32
2.4. La normativa italiana	"	34
2.5. Le strutture in muratura	"	38
3. ARCHI IN MURATURA	"	39
3.1. Breve introduzione	"	39
3.2. Terminologia di base e tipologie	"	40
3.3. Evoluzione del calcolo dell'arco	"	44
3.3.1. Il problema del proporzionamento dei piedritti	"	44

3.3.2.	La stabilità dell'arco: curva delle pressioni	p.	51
3.3.3.	La forma dell'arco.....	"	53
3.4.	Approccio alla modellazione FEM.....	"	54
4.	VOLTE IN MURATURA	"	56
4.1.	Le tipologie: comportamento strutturale.....	"	58
4.1.1.	La volta a botte.....	"	58
4.1.2.	Le cupole.....	"	65
4.1.3.	La volta a crociera.....	"	69
4.1.4.	La volta a padiglione.....	"	73
4.2.	Analisi del quadro fessurativo	"	75
5.	IL CONSOLIDAMENTO		
	DELLE VOLTE IN MURATURA MEDIANTE FRP	"	81
5.1.	Le linee guida e i riferimenti normativi.....	"	82
5.1.1.	“Cosa fare” e “cosa non fare”	"	83
5.1.2.	Volte a semplice curvatura	"	83
5.1.3.	Volte a doppia curvatura.....	"	84
5.2.	Schemi tipologici dei rinforzi FRP su archi e volte.....	"	84
5.2.1.	La volta a botte.....	"	85
5.2.2.	La cupola.....	"	86
5.2.3.	La volta a crociera.....	"	87
5.2.4.	La volta a vela	"	89
5.2.5.	La volta a padiglione.....	"	90
5.2.6.	Connessioni e ancoraggi	"	92
5.2.7.	Esempio di rinforzo su una struttura voltata complessa	"	94
5.3.	Breve approccio alla modellazione FEM.....	"	97
5.4.	Metodi semplificati ed esempi di calcolo	"	99
5.4.1.	Esempio n. 1		
	<i>Rinforzo di una volta a crociera a pianta rettangolare</i>	"	99
5.4.2.	Esempio n. 2		
	<i>Rinforzo di una cupola semicircolare</i>	"	105
5.4.3.	Esempio n. 3		
	<i>Consolidamento di una volta a padiglione</i>	"	108
5.4.4.	Esempio n. 4		
	<i>Rinforzo di un arco in muratura</i>	"	110
5.5.	Influenza del rinforzo FRP nelle volte in muratura	"	112
5.5.1.	Meccanismi di rottura della struttura rinforzata.....	"	115
5.5.2.	Il problema del “debonding”	"	116
6.	CASI APPLICATIVI	"	119
6.1.	Rinforzo di volte a crociera, ex monastero di S. Paolo d'Argon (BG).....	"	120
6.2.	Rinforzo di cupole, opificio di Biella (BI).....	"	124

6.3.	Rinforzo di volte a padiglione, villa residenziale di Alessandria (AL)	p.	126
6.4.	Rinforzo strutturale di volta a botte, Milano (MI)	"	128
6.5.	Rinforzo strutturale di volta a crociera, Pavia (PV)	"	129
6.6.	Consolidamento di arco in muratura, Verona (VR)	"	130
7.	BIBLIOGRAFIA	"	132
8.	INSTALLAZIONE DEL SOFTWARE INCLUSO	"	133
8.1.	Note sul software incluso	"	133
8.2.	Requisiti hardware e software	"	133
8.3.	Installazione ed attivazione del software	"	134

PREFAZIONE

La muratura in laterizio costituisce il più antico elemento da costruzione: nelle civiltà mediterranee essa ha rivestito un ruolo dominante in tutto l'arco temporale che collega le tecnologie costruttive primordiali ai moderni prodotti della rivoluzione industriale.

Già all'epoca degli Ittiti e dei Babilonesi era la concezione strutturale più impiegata, ma solo i Romani ne caratterizzarono l'uso per la realizzazione di opere monumentali, per le strutture verticali e per l'esecuzione di archi e volte.

Vi è una grande varietà di murature dovuta al carattere antico delle stesse, che si differenziano nella composizione, nella tessitura e nelle metodologie costruttive, tipiche delle varie epoche e aree geografiche.

La muratura nasce attraverso la sovrapposizione di elementi di varia natura (pietra, laterizio, ...) in genere collegati tra loro mediante diverse tipologie di leganti; solo con l'avvento di nuovi sistemi costruttivi in acciaio, in cemento armato si creò gradualmente un disinteresse nell'utilizzo della muratura come elemento strutturale, poiché molto oneroso dal punto di vista della manodopera.

Tuttavia, negli ultimi anni è stato possibile assistere ad una sua rivalutazione, in quanto le nuove tipologie strutturali, sebbene più semplici e meno costose dal punto di vista esecutivo, hanno messo in evidenza carenze anche dal punto di vista statico, e, poi, l'avvento delle nuove tecnologie ha portato sino ad oggi un'evoluzione nei processi produttivi del laterizio, mettendo a disposizione dei progettisti e delle imprese laterizi speciali con elevate caratteristiche di resistenza sia a livello strutturale, sia a livello di comfort abitativo e risparmio energetico.

Grazie ai suoi notevoli pregi, la muratura portante è una tecnica costruttiva molto diffusa in Inghilterra, Stati Uniti, Germania e Svizzera, dove gli studi effettuati e le rilevanti esperienze sono sfociati ormai da anni in una serie di norme tecniche rigorose.

Ciò di cui, bensì, si andrà a parlare nel presente libro non sarà la muratura portante in genere e la teoria al riguardo, ma verranno analizzate nel particolare le strutture voltate in muratura e le esperienze a riguardo, partendo da un'analisi preliminare su come gli originali costruttori concepivano le loro opere e le realizzavano, sullo stato fessurativo e di dissesto tipici delle stesse fino a giungere all'approccio corretto per lo studio delle volte, degli archi e delle cupole, alla progettazione degli interventi di consolidamento strutturale efficaci e compatibili con le strutture storiche.

In particolare, si valuterà per ogni tipologia il comportamento delle strutture voltate e gli interventi di rinforzo mediante l'applicazione dei materiali compositi, il cui acronimo è ridotto in FRP (*Fiber Reinforced Polymers*), andando a osservare alcuni esempi pratici realizzati.

RINGRAZIAMENTI

Questo testo è stato realizzato con il contributo della ditta Building Improving S.r.l. di Milano, che opera nel settore dei rinforzi strutturali con i materiali compositi dal 1994 e con cui collaboro da ormai due anni.

Desidero, inoltre, esprimere la più sincera gratitudine ai miei colleghi di lavoro che, ogni giorno, mi insegnano qualcosa di nuovo e con cui risolvo i casi più disparati di problematiche edilizie esistenti in Italia.

ARCHI IN MURATURA

3.1. Breve introduzione

Leonardo da Vinci: *«Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze; imperoché l'arco negli edifici è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circoli ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in una unica fortezza.»*.

L'arco è un elemento strutturale in grado di riprendere, con la sua traiettoria curvilinea, le sollecitazioni derivanti dai carichi gravitazionali trasformandole in forze prevalenti di compressioni che agiscono sui conci facenti parte l'arco, i quali si reggono per mutuo contrasto, poiché sostenuti alle due estremità da elementi verticali, definiti piedritti.

In conclusione, non è un elemento decorativo, è un principio statico, una struttura prevalentemente compressa che rappresenta la concretizzazione delle isostatiche di compressione della struttura.

Il concetto di arco naturale nasce dall'osservazione: è il caso di una parete muraria con un'apertura; al di sopra di un architrave inflesso si genera un meccanismo di rottura che va a creare una fessurazione tra muratura in sede e muratura in movimento, generando così un possibile crollo di tale porzione, ma lasciando pressoché indisturbata la statica del resto del muro. Questa fessura, o linea di distacco, ha la forma di un arco.



Fig. 040. Esempi di arco naturale al di sopra di un'apertura nella struttura muraria

I primi tentativi di sfruttare il principio dell'arco naturale sfociano nella sovrapposizione di conci in muratura disposti con giunti orizzontali, ognuno sempre più in aggetto, dando così origine agli pseudoarchi. Questi si basano sull'equilibrio della mensola, che si regola, essenzialmente, sull'equivalenza del momento esterno agente con quello di rotazione interno del

vincolo. Tale condizione è difficile da riscontrarsi in realtà, sia per il facile sbilanciamento verticale provocato dalla sovrapposizione dei carichi, che per la limitata altezza interna. Ecco allora la necessità di sporgenze minori e, quindi, di profili acuti più vicini a questa linea ideale. La sagoma inclinata può acquistare, talvolta, evidenza formale, alleggerendo la struttura e rendendo il profilo continuo mediante la conformazione triangolare a mensola dei conci.

Un esempio tipico di pseudoarco è la Porta dei Leoni di Micene, raffigurata nell'immagine sottostante: l'ingresso della Rocca di Micene consente di vedere le grandi pietre squadrate con cui erano state costruite le mura (secc. XIV-XII a.C.), la cui porta è costituita da due stipiti e da un architrave molto imponenti, secondo una struttura trilitica.



Fig. 041. *Porta dei Leoni, Micene*

3.2. Terminologia di base e tipologie

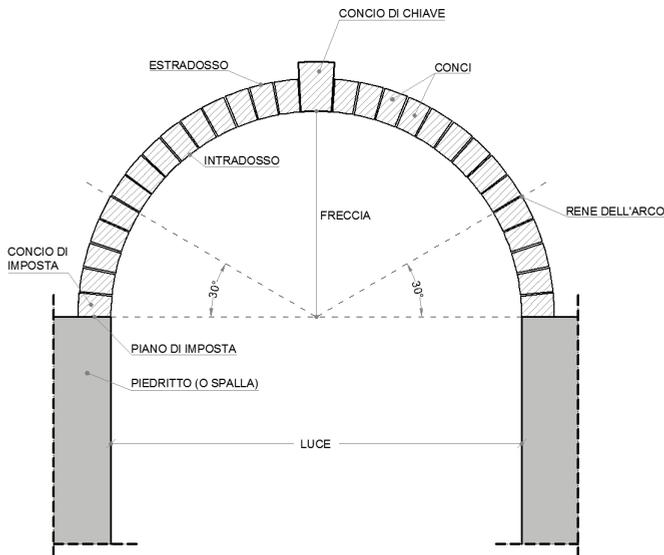


Fig. 042. *Elementi caratteristici di un arco*

<u>CONCIO</u> :	elemento in mattone o pietra a giunti inclinati resistente a compressione, costituente l'arco.
<u>CONCIO DI CHIAVE</u> :	concio situato in corrispondenza della sommità dell'arco.
<u>INTRADOSSO</u> :	linea di delimitazione interna dell'arco.
<u>ESTRADOSSO</u> :	linea di delimitazione esterna dell'arco.
<u>PIEDRITTI</u> (o spalle):	elementi strutturali verticali sui quali si scaricano le forze trasmesse dall'arco.
<u>PIANO D'IMPOSTA</u> :	piano all'estremità superiore del piedritto che funge da appoggio al primo concio dell'arco (concio di imposta).
<u>LUCE</u> (o corda):	distanza netta esistente tra i fili interni dei piani di imposta.
<u>FRECCIA</u> (o monta):	distanza tra la corda dell'arco e l'intradosso del concio di chiave.
<u>RENE</u> :	sezione dell'arco inclinate di 30° rispetto all'orizzontale.
<u>CATENA</u> :	elemento che viene, talvolta, impiegato per neutralizzare la spinta orizzontale trasmessa ai piedritti, contribuendo alla stabilità dell'arco.

Indichiamo ora, per semplicità, con f la freccia e l la luce dell'arco.

Gli archi assumono tre forme principali, la cui configurazione dipende dal rapporto tra la freccia e la metà della luce, ovvero $f/(l/2)$:

- a sesto ribassato, quando $\frac{f}{l/2} < 1$;
- a tutto sesto, quando $\frac{f}{l/2} = 1$;
- a sesto acuto, ovvero $\frac{f}{l/2} > 1$.

In relazione al sesto e ad altre caratteristiche geometriche, gli archi possono assumere diverse forme. Nel nostro caso, ci soffermiamo, per brevità, sulle tre tipologie appena elencate.

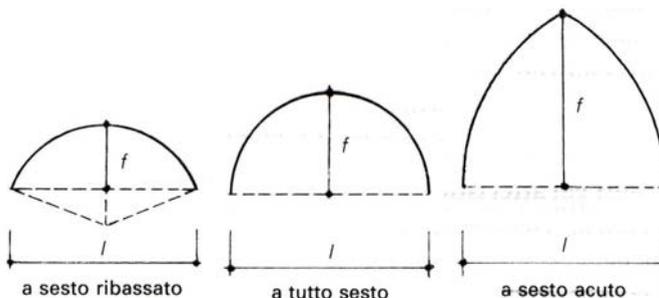


Fig. 043. Forme dell'intradosso di un arco a seconda del suo sesto

Un arco si dice ribassato quando il centro verso il quale tendono i giunti dei cunei si trova inferiormente alla linea d'imposta. È un tipo di arco più economico e meno impegnativo; a parità di larghezza della luce l'arco ribassato genera un'apertura più bassa.

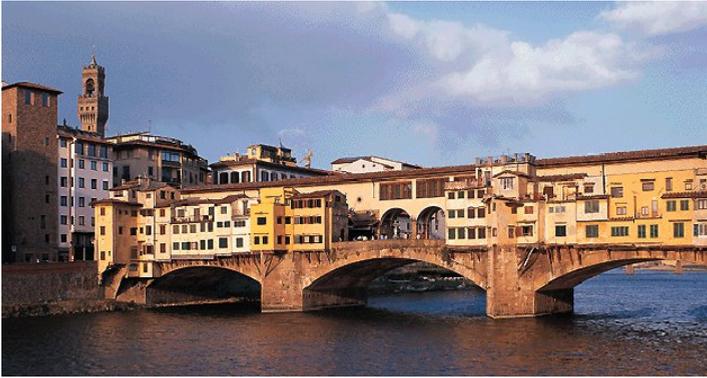


Fig. 044. *Gli archi a sesto ribassato del Ponte Vecchio di Firenze*

A titolo d'esempio, la piattabanda è un arco ribassato che arriva ad avere un intradosso rettilineo: essa corrisponde ancora allo schema statico dell'arco, dal quale si differenzia, tuttavia, per la forma dei conci e la loro posa in opera. La piattabanda va a sostituire l'architrave disposto a coronamento delle aperture per reggere la soprastante parte di struttura muraria, e, negli edifici antichi, questa veniva spesso sormontata da un arco di scarico, definito sordino, che ne riduceva le sollecitazioni.

L'arco a tutto sesto (o semicircolare) è una tipologia contraddistinta da una volta a semicerchio, detto anche a pieno centro, e prevede che il centro verso il quale convergono i giunti si trovi sul piano d'imposta. In particolare, il concio di chiave distribuisce il peso dell'edificio sui conci laterali, fino a scaricarlo sulle spalle di sostegno dell'arco.



Fig. 045. *La Porta dell'arco a Volterra (PI)*

L'arco a sesto acuto, detto anche ogivale, è un arco bicentrico che contempla arcate appartenenti a circonferenze con raggio maggiore o uguale alla base dell'arco stesso: esso presenta diversi vantaggi rispetto agli altri tipi di arco, in particolare la risultante delle spinte dovute al peso proprio e ai carichi gravanti su di esso cade molto più vicino alla base del piedritto; strutturalmente non si reggeva solo sui pilastri delle pareti, ma era sostenuto da archi rampanti esterni che si slanciavano in fuori verso potenti contrafforti.



Fig. 046. *Palazzo Ducale a Venezia*

L'impiego delle strutture ad arco è ormai obsoleto, poiché la loro realizzazione comporta maestranze ed operazioni piuttosto onerose per la costruzione, il disarmo della centina e la messa in opera dei conci.

La centinatura è una struttura provvisoria in legno in grado di sostenere i conci e dare la forma all'intradosso dell'arco, e varia in relazione alla luce di quest'ultimo. È costituita da una parte inferiore nettamente più robusta e da una parte superiore, che ha la forma convessa dell'intradosso dell'arco stesso: per archi di luce modesta si utilizzano i cosiddetti tamburi, ovvero due tavolati con il contorno superiore corrispondente alla linea del sesto e collegati tra di loro da listelli formanti il manto.

Un'altra tecnica impiegata per la centinatura è quella di erigere un muretto a secco su due legni posti orizzontalmente come architravi, che poggiano su due ritti fiancheggianti le spalle dell'arco: tale muretto è composto da mattoni disposti a griglia in modo tale da avere una superficie scaglionata, resa poi solidale e continua grazie ad uno strato di malta.

La messa in opera dei conci inizia dal piano di imposta verso il centro, concludendosi con l'inserimento del concio di chiave che chiude la struttura curvilinea: tale operazione varia in base alla tipologia di materiale utilizzato per i conci, pietra o mattone, in quanto nel primo caso occorre tagliarli in modo che le facce laterali combacino perfettamente con quelle dei conci adiacenti, mentre nel secondo caso i mattoni vengono posati con giunti di spessore variabile tra intradosso ed estradosso.

Il disarmo della centina deve avvenire con particolari cautele, in funzione sempre della luce più o meno modesta dell'arco: infatti, gli elementi devono assestarsi sotto carico in modo lento e graduale, senza movimenti che causino una distribuzione squilibrata degli sforzi.

3.3. Evoluzione del calcolo dell'arco

La linea d'indagine che ha guidato tutti gli studi del '700 è quella che si propone di verificare se le dimensioni di un arco sono sufficienti ad impedire l'attivazione di un meccanismo di collasso sotto l'azione del peso proprio e dei carichi aggiuntivi.

Il primo riferimento chiaro all'arco come elemento strutturale, si deve a Leonardo da Vinci il quale propose una serie di osservazioni e di promettenti intuizioni che solo alcuni secoli dopo avrebbero trovato sviluppo e approfondimento. Infatti la sua affermazione *“l'arco non si romperà, se la corda dell'archi di fori non toccherà l'arco di dentro”* fu riproposta come regola, seppur in forma più ampia, negli studi del Settecento.

Nelle prime teorie sulla statica di strutture voltate il problema, su cui fondamentalmente si dibatté, riguardò la determinazione della curva delle pressioni relativa ai carichi assegnati. Nel loro progressivo sviluppo, questi studi arrivarono ad individuare, nella situazione limite di collasso dell'arco e quindi nella corrispondente curva delle pressioni, lo strumento che permise di determinare la spinta sulle imposte. Pertanto, le teorie – rivolte specialmente all'individuazione dei meccanismi di rottura, gli unici, d'altronde, suscettibili di verifica sperimentale – e quelle in seguito sviluppate per la ricerca della curva di pressione e della migliore forma attribuibile ad un arco, contenevano già gli elementi fondamentali per la descrizione del comportamento degli archi.

3.3.1. Il problema del proporzionamento dei piedritti

L'arco, in corrispondenza delle imposte, esercita delle spinte verso l'esterno che tendono a ribaltare i piedritti che lo sostengono. La dimensione del piedritto deve essere tale da poter esplicitare col suo peso una stabilizzazione sufficiente per poter evitare il ribaltamento.

3.3.1.1. Metodo degli antichi Romani

Gli antichi costruttori erano pienamente consapevoli del fenomeno, ed utilizzarono delle semplici regole per il dimensionamento geometrico. In particolare, si indichi con R il raggio dell'arco, con H l'altezza del piedritto e s lo spessore di quest'ultimo.

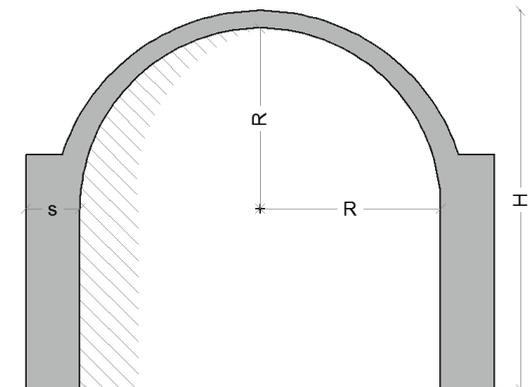


Fig. 047. Schema tipologico di arcata

Il proporzionamento, ad esempio, veniva risolto in modo che risultasse:

$$H = 2R$$

$$s = 0,3R$$

Due casi tipici di questo metodo di dimensionamento sono il *Pantheon* a Roma e il *Mausoleo di Romolo*.

3.3.1.2. Metodo di B. A. Vittone

Il più antico metodo di proporzionamento documentato risulta essere di Bernardo Antonio Vittone, e si basa su alcune regole geometriche:

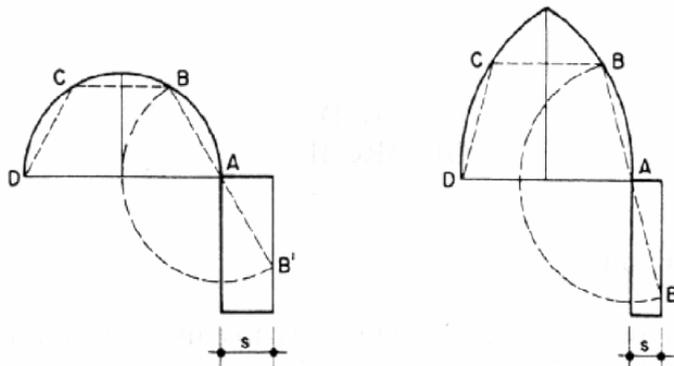


Fig. 048 – Regola geometrica per il dimensionamento dei piedritti

- Qualunque sia la forma dell'arco si divide la linea di intradosso in porzioni di uguale lunghezza AB, BC, CD.
- Si traccia la semicirconferenza di raggio pari a tale lunghezza e centro all'imposta dell'arco nel punto A.
- Prolungando il lato AB fino al punto B' simmetrico rispetto ad A si trova lo spigolo esterno del piedritto.

Questa regola impone un diverso dimensionamento dei piedritti al variare della geometria dell'arco.

3.3.1.3. Metodo di De La Hire (1640-1718)

Il problema della stabilità dell'arco compare per la prima volta nel "Traité de la mécanique" di P. De La Hire. Egli studiò l'equilibrio dell'arco nella situazione di rottura descrivendo prima il meccanismo di collasso: ovvero, sezionando le reni dell'arco a 45°, la parte centrale resta integra e scivola verso il basso esercitando un'azione di cuneo sulle parti restanti dell'arco spingendole in fuori e innescando un meccanismo di ribaltamento senza scorrimento.

L'ipotesi di base limitativa su cui, però, si basò De La Hire fu l'assenza di attrito tra i conci: nella realtà si deve pensare che l'imposta dell'arco è orizzontale, e se non esistesse l'azione delle forze di attrito, l'equilibrio non sarebbe possibile.

Il meccanismo di collasso, quindi, previsto da De La Hire, è il seguente.

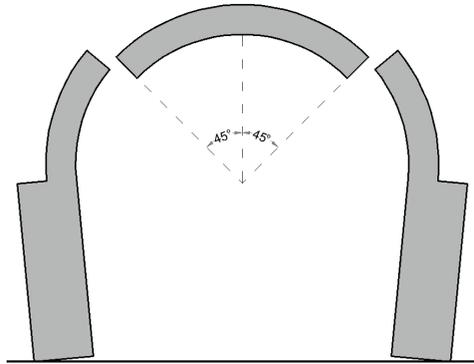


Fig. 049. Meccanismo di collasso per scivolamento secondo De La Hire

Il piedritto tende, perciò, a ruotare intorno allo spigolo esterno di base C.

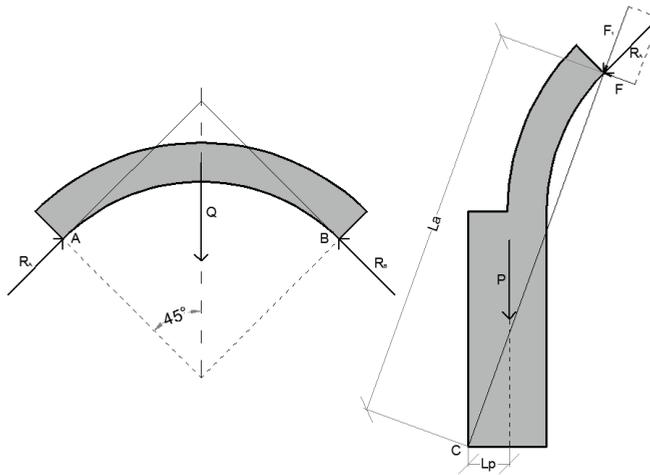


Fig. 050. Approccio grafico del metodo di dimensionamento di De La Hire

Il peso Q del cuneo centrale viene scomposto nelle due componenti R_A e R_B ortogonali alle due superfici di rottura. Si traccia una linea dal punto A al punto C e si scompone la forza R_A nelle due componenti F e F_1 , individuando la leva equivalente.

Per l'equilibrio della leva il momento ribaltante $F_1 l_A$ deve uguagliare il momento stabilizzante $P l_D$, dove P è il peso proprio del piedritto e della parte di arco ad esso aderente.

Pertanto il peso del piedritto P necessario per l'equilibrio è dato dall'espressione:

$$P = F \frac{l_A}{l_D}$$

Il vero traguardo di questa teoria fu quello di riconoscere nel corpo della costruzione la presenza nascosta di qualche “macchina semplice” le cui leggi di equilibrio consentono di interpretare il funzionamento della costruzione nella quale quella macchina si nasconde.

3.3.1.4. Metodo di De Belidor (1729)

Al contrario di De La Hire, De Belidor ipotizzò che la reazione R_A (in questo caso chiamata F) dell'arco fosse applicata a metà della sezione, anziché all'intradosso.

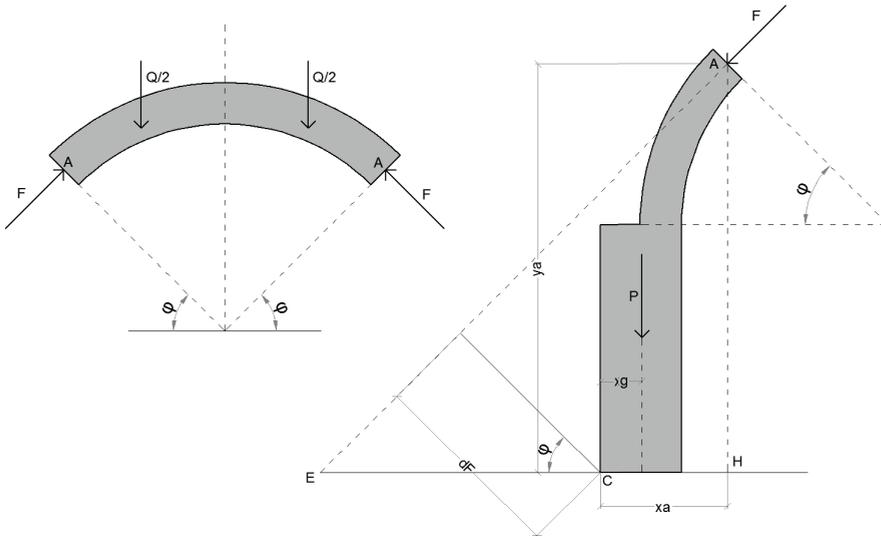


Fig. 051. Approccio grafico del metodo di dimensionamento di De Belidor

La reazione che il cuneo centrale esercita sulla sezione di scorrimento è data da:

$$F = \frac{Q}{2 \cos \varphi}$$

Imponiamo ora l'equilibrio alla rotazione rispetto il punto C, e otteniamo:

$$F d_F = P x_g$$

dove d_F è funzione di x_a (CH), y_a (AH) e dell'angolo φ .

$$\overline{EC} = \overline{EH} - x_a = y_a \tan \varphi - x_a$$

da cui risulta:

$$d_F = (y_a \tan \varphi - x_a) \cos \varphi$$

Pertanto, per ottenere la stabilità dell'arco, il peso proprio del piedritto deve essere uguale a:

$$P = \frac{Q}{2 \cos \varphi} (y_a \tan \varphi - x_a) \frac{\cos \varphi}{x_g} = \frac{Q(y_a \tan \varphi - x_a)}{2x_g}$$

da cui si può ricavare lo spessore del piedritto.

NOTA. Anche il metodo di De Belidor considera, comunque, un giunto senza attrito.

3.3.1.5. Il collasso flessionale di Couplet (1730)

Una lettura più realistica della teoria del cuneo fu data da Couplet, che abbandonò questo studio per suggerire un altro modo di collasso o rottura di un arco, secondo cui si romperebbe in quattro parti formanti cinque cerniere, collocate all'estradosso in chiave, all'imposta e all'intradosso in posizione rialzata a 45° rispetto all'orizzontale.

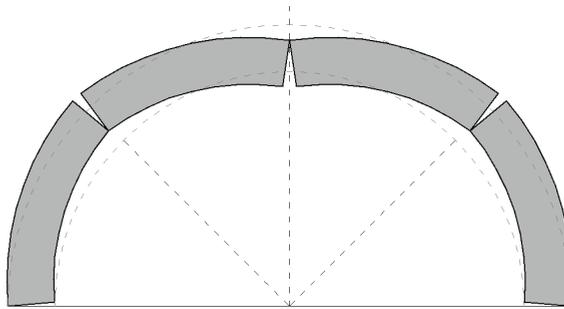


Fig. 052. Meccanismo di collasso a cinque cerniere secondo Couplet

3.3.1.6. Il principio dei massimi e dei minimi di C. Coulomb (1773)

Coulomb affrontò, per la prima volta, il problema della natura del comportamento delle volte in presenza di coesione della malta ed attrito tra i conci: egli offrì un metodo di analisi per la determinazione dei meccanismi di rottura e della spinta orizzontale in chiave variabile in funzione dell'angolo di rottura dei giunti alle reni.

Infatti, considerò una porzione di arco compresa tra la sezione in chiave e un generico giunto assunto come critico ed individuò quattro modalità di collasso, così evidenziate:

- lo scorrimento relativo tra le facce dei giunti nelle due direzioni;
- l'apertura del giunto per rotazione all'intradosso e all'estradosso.

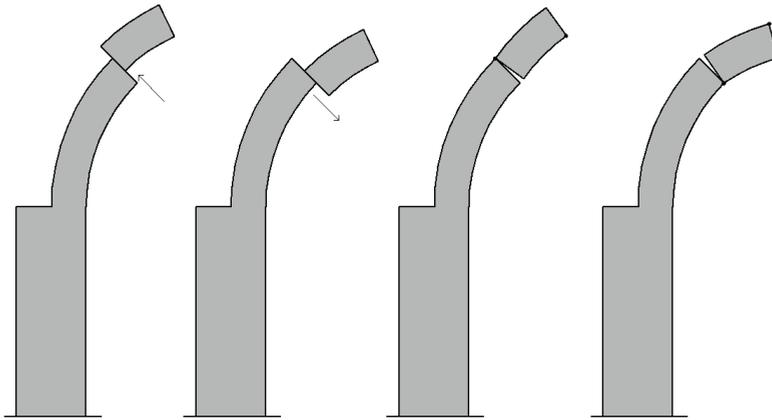


Fig. 053. *I quattro meccanismi di collasso ipotizzati da C. Coulomb*

Per attivare questi meccanismi di rottura, viene imposto l'equilibrio limite di scorrimento nelle due direzioni, ottenendo un valore minimo ed uno massimo della spinta orizzontale in chiave. Analogamente, si procede imponendo l'equilibrio limite alla rotazione nelle due direzioni.

Così facendo, la massima forza di attrito viene assunta proporzionale all'azione normale al giunto con un apposito coefficiente, e i valori massimi e minimi della spinta orizzontale variano in funzione dell'angolo φ del giunto critico sull'arco.

L'esito finale è quello di ottenere un limite inferiore e un limite superiore di tale spinta, entro il cui range l'equilibrio della volta viene mantenuto.

3.3.1.7. *Il calcolo a rottura di L. Mascheroni (1785)*

Chi idealizzò i meccanismi di rottura dell'arco individuati da De la Hire e Coulomb in sistemi ad aste rigide fu Mascheroni che propose lo studio di due possibili collassi dell'arco:

- la rottura per scivolamento del cuneo centrale, già illustrato da De la Hire;
- la rottura multipla con formazione di cinque cerniere nell'arco e nei piedritti.

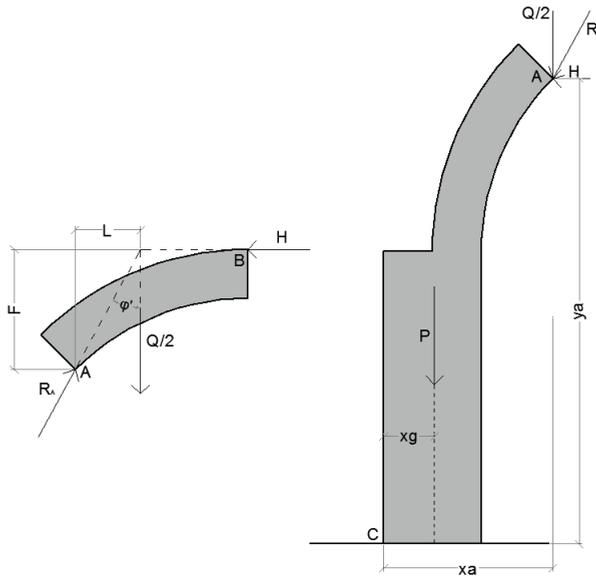


Fig. 054 – *Approccio grafico del metodo di dimensionamento di L. Mascheroni*

Viene analizzato metà arco: la risultante R_A è data dalla composizione del peso proprio del concio $Q/2$ e della spinta orizzontale in chiave H e viene applicata nella cerniera A .

L'azione che il concio AB esercita sul piedritto è determinata dalle due componenti, verticale $Q/2$ ed orizzontale H ; quest'ultima è definita come:

$$H = \frac{Q \tan \varphi'}{2} \quad \text{dove} \quad \tan \varphi' = \frac{L}{F}$$

Imponendo, inoltre, l'equilibrio alla rotazione intorno al punto C , si ha:

$$Hy_A - \frac{Q}{2}x_A - Px_G = 0$$

Sostituendo H , si ottiene:

$$P = \frac{Q y_A \tan \varphi' - x_A}{2 x_G}$$

Se il carico P risulta maggiore in tutti i punti dell'arco del secondo membro dell'equazione, si ha, secondo Mascheroni, la verifica dell'arco.

Confrontando, inoltre, le formule di De Belidor e Mascheroni risulta, in genere, la disequazione seguente:

$$\varphi > \varphi'$$

Pertanto, il peso P necessario per evitare lo scorrimento del cuneo centrale è maggiore di quello richiesto per evitare la formazione delle cerniere per cui tale meccanismo risulta più pericoloso per l'arco. Mascheroni, inoltre, considera tutte le sezioni come possibilmente critiche, non solo quella a 45° .

3.3.2. La stabilità dell'arco: curva delle pressioni

Con l'evolversi della teoria dell'elasticità, lo studio dell'equilibrio dell'arco viene effettuato assumendo il materiale omogeneo, isotropo, non resistente a trazione.

Il problema della determinazione del regime statico di un arco venne risolto da Mery utilizzando un poligono di equilibrio a passaggio obbligato per due punti: il terzo medio inferiore nella sezione d'imposta e il terzo medio superiore nella sezione in chiave, con retta d'azione orizzontale. In questo modo, noti i carichi verticali agenti, fu possibile ottenere l'andamento della curva delle pressioni.

Questo metodo, tuttavia, risulta essere valido solamente sotto alcune ipotesi di partenza:

- Arco a tutto sesto simmetrico;
- Carichi simmetrici;
- Spinta in chiave esclusivamente orizzontale;
- Spessore dell'arco uniforme;
- Arco costituito da materiale sufficientemente rigido e resistente a compressione.

Affinché la stabilità dell'arco sia verificata, tale curva delle pressioni doveva, quindi, passare per il terzo medio superiore in chiave e per il terzo medio inferiore alla reni, restando all'interno di tale spessore.

Il metodo di verifica di Mery consiste nella costruzione di tale linea relativo al sistema di carichi corrispondenti ai singoli conci, che deve essere, come detto in precedenza, simmetrico, poiché è la condizione necessaria per la formazione delle cerniere in chiave e alle reni. Per garantire il soddisfacimento dell'ipotesi il rapporto tra peso proprio e carichi variabili deve essere grande.

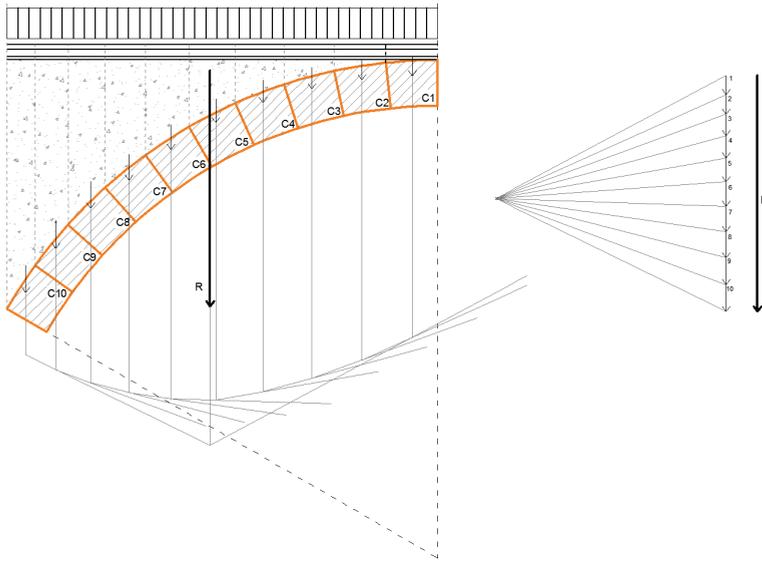


Fig. 055. Metodo grafico di verifica di Mery
– fase 1: posizione grafica della risultante R

Si considera una sezione dell'arco di spessore uniforme, che viene suddivisa in un numero specifico di conci, per ciascuno dei quali viene determinato il carico agente (P.P. + permanenti + variabili): di queste risultanti si effettua il poligono funicolare per ritrovare graficamente la posizione della risultante R dell'intero elemento di arco, che equivarrà alla somma delle singole forze dei relativi conci.

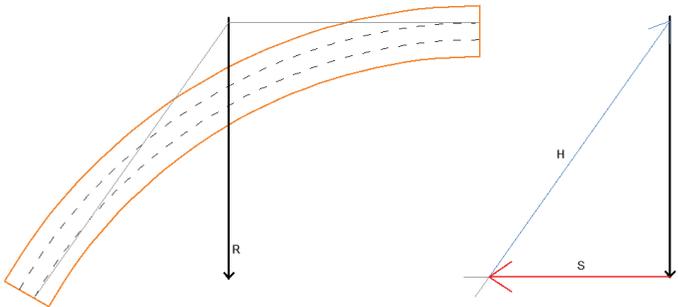


Fig. 056. Metodo grafico di verifica di Mery
– fase 2: la scomposizione della risultante R

Il prolungamento della retta di azione della spinta orizzontale S , perpendicolare alla sezione in chiave e applicata al terzo medio superiore, interseca la risultante R in un punto: la congiungente tale punto con il terzo medio inferiore alla sezione d'imposta rappresenta la linea di azione della spinta H . Scomponendo ora la risultante R , secondo tali direzioni, si ottengono le intensità di S e H .

Assumendo il punto O come nuovo polo di proiezione, si proietta nuovamente la retta delle forze e si traccia il poligono di successive risultanti, o curva delle pressioni, che deve essere contenuta, per tutto il suo sviluppo, entro il terzo medio della sezione della volta affinché questa risulti compressa in ogni sua sezione.

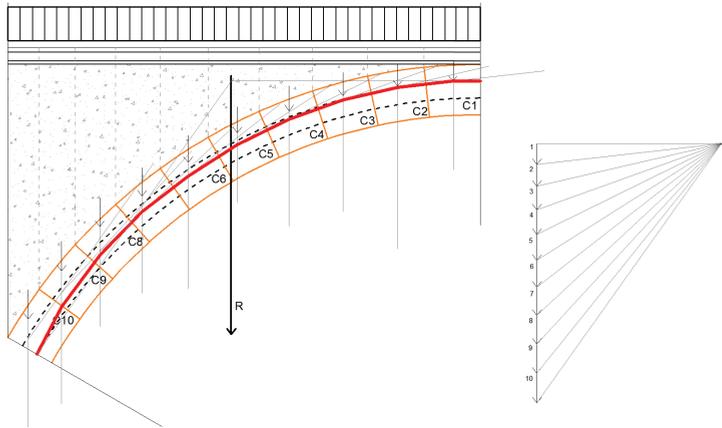


Fig. 057. Metodo grafico di verifica di Mery – fase 3: tracciamento della curva delle pressioni

3.3.3. La forma dell'arco

Gli studi condotti sull'arco nel corso del XIX secolo riguardarono, prevalentemente, la forma da conferire all'arco per garantire la centratura dello sforzo normale in corrispondenza delle facce a contatto tra i vari conci.

Ne risultò che il profilo più adatto per un arco è quello la cui linea d'asse si dispone secondo la funicolare dei carichi ad esso applicati.

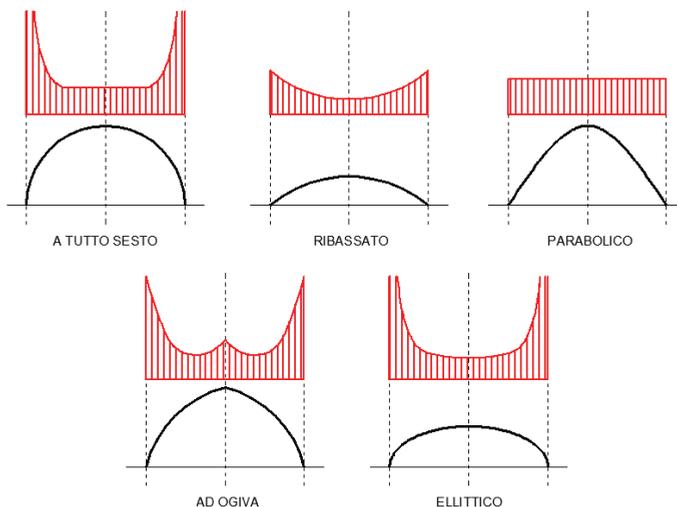


Fig. 058. Distribuzione dei carichi che genera compressione uniforme per le diverse direttrici

3.4. Approccio alla modellazione FEM

Come già enunciato, il problema fondamentale nell'analisi di qualsiasi struttura in muratura, è il fatto che tale materiale presenta diversa resistenza a compressione e a trazione; questa circostanza implica la non conoscenza a priori di quale sia l'effettiva struttura reagente, sotto condizioni di carico assegnate.

Gli archi trasferiscono agli appoggi il proprio peso, i sovraccarichi permanenti e variabili e i carichi provenienti dagli eventuali solai poggianti sui muri che sovrastano l'arco. Così facendo le linee di forza vengono distribuite nella muratura verticalmente nel tratto più in alto deviando verso l'imposta dell'arco.

In sostanza, in caso della presenza della muratura sovrastante, si trasforma da arco a tutto sesto (o ribassato) in arco a sesto acuto.

Tutto il carico superiore, pertanto, viene trasmesso nei muri di supporto, seguendo un percorso che determina uno stato tensionale prevalentemente di compressione nella muratura che sovrasta l'arco.

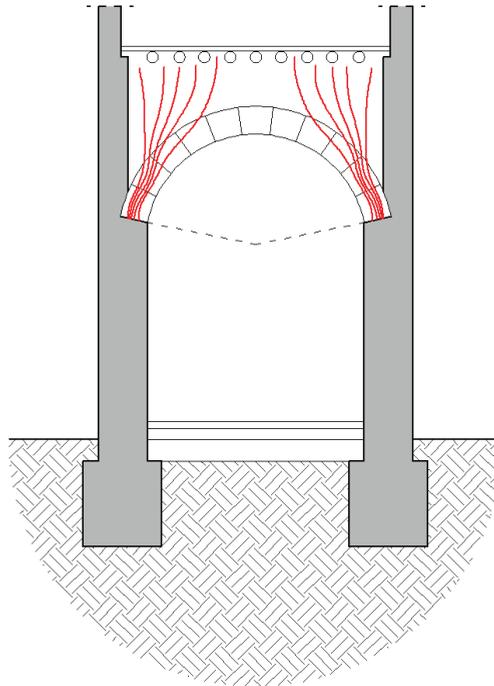


Fig. 058. Linee di forza del sistema ad arco

La conseguenza di quanto detto è che l'efficacia strutturale dell'arco viene mantenuta finché l'imposta non subisce movimenti causati dalla spinta orizzontale dell'arco, dai cedimenti fondali e dall'azione sismica.

Ci si può rendere conto del modo in cui “viaggiano” le tensioni di compressione e di trazione in un arco tramite un'adeguata modellazione agli elementi finiti (o più semplicemente detta anche **analisi FEM**).

Preliminarmente va, inoltre, detto che l'arco, a differenza delle volte, può crollare e quindi crollare più frequentemente a causa dello scivolamento di uno o più conci ovvero per la rottura a compressione di uno di essi.

Esempio – Sistema ad arco

Si considera il caso di un arco semicircolare di sezione costante a due cerniere fisse. Esso poggia su due imposte in muratura portante vincolate alla base ed è caricato da un'ulteriore muratura sovrastante.

Viene effettuata una modellazione FEM per comprendere dove e quali tensioni si instaurano nell'elemento curvilineo.

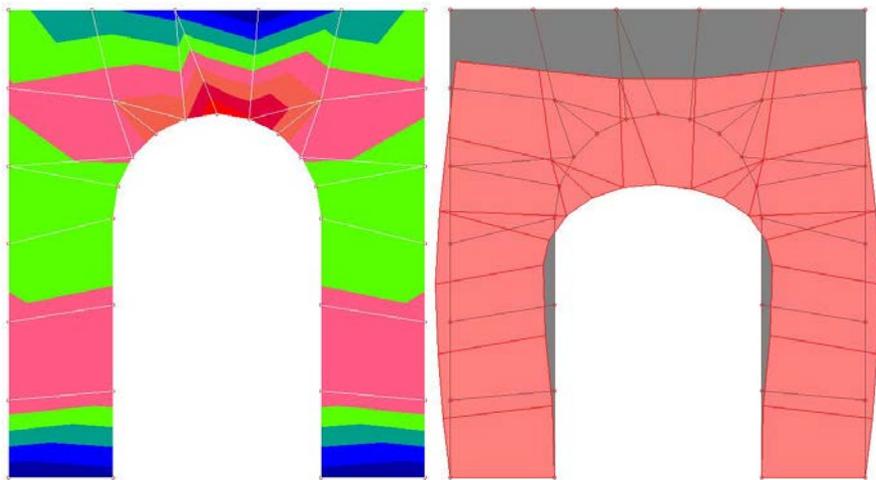


Fig. 059. *Tensioni di trazione e compressione, deformazione statica di un elemento curvilineo*

Il comportamento dei muri laterali può essere simulato dalla presenza di due bielle inclinate verso l'interno.

In particolare, la spinta che genera l'arco alle imposte causa uno spostamento verso l'esterno delle murature e di conseguenza possono avvenire distacchi parziali tra i conci per rotazione: sorge, pertanto, continuità nei muri di supporto e all'intradosso della chiave dell'arco; tale fenomeno è limitato però dal fatto che la spinta che l'arco genera è relativamente di bassa entità, e la muratura sovrastante agisce come elemento stabilizzante.

Questo effetto viene incrementato durante l'azione sismica quando i modi propri di vibrare risultano differenti: le basi dell'imposta d'arco tendono ad allontanarsi ed avvicinarsi ripetutamente, finché non avviene lo scivolamento dei conci o la rottura per compressione, con il conseguente possibile collasso e crollo dell'arco.

In secondo luogo, il cedimento verticale e la rotazione alla base del muro causa uno spostamento e una rotazione dell'imposta d'arco che porta, quindi, ad avere una diversa configurazione geometrica e far nascere moti scorrimento tra i conci.

CAPITOLO 4

VOLTE IN MURATURA

La volta è una struttura che può essere concepita come un accostamento in adiacenza di molteplici archi, a copertura di un intero locale di un edificio.

L'impiego di queste strutture voltate, così come l'arco in genere, è assai raro al giorno d'oggi: si tratta, in effetti, di soluzioni strutturali che, oltre ad avere oneri e complessità notevoli durante la fase di realizzazione, impongono una serie di vincoli architettonici all'ambiente interno: ad esempio, condizionano la distribuzione planimetrica dei locali, obbligando a posizionare le murature perimetrali in corrispondenza dei loro piani d'imposta.

Le caratteristiche proprie di una volta, di qualsiasi tipologia, sono essenzialmente le seguenti:

- uno schema statico in cui i carichi verticali vengono scaricati sugli appoggi tramite azioni di mutuo contrasto che determinano forze orizzontali le quali devono essere riprese da pareti, opere murarie (contrafforti) di dimensioni adeguate o da catene metalliche;
- una centinatura molto complessa;
- la conformazione delle superfici d'intradosso con differenti tipi di curvatura, ribassate o non;
- un rilevante peso proprio della costruzione, che comprende la necessità di eseguire riempimenti all'estradosso (rinfianchi) per creare le superfici orizzontali dei solai degli ambienti superiori; in particolare, tali rinfianchi svolgono anche la funzione fondamentale di contrastare la spinta della volta.

A seconda della forma in pianta e della quota dei piani d'imposta, le volte prendono varie denominazioni: volta retta (a pianta rettangolare), volta obliqua (a pianta romboidale), volta conica (a pianta trapezoidale), volta rampante (con piani d'imposta inclinati).

La distinzione più importante di queste strutture, tuttavia, viene fatta in base alla loro forma in:

- *volte semplici*, caratterizzate da intradossi regolari, cilindrici o sferici;
- *volte composte*, con superfici d'intradosso ottenute tramite la composizione di settori di volte semplici.

Analogamente agli archi, le volte vengono realizzate attraverso la stessa procedura che prevede la centinatura (costruzione e disarmo) e la posa in opera dei mattoni, e la complessità varia in base, ovviamente, a seconda della forma, dell'ampiezza e del peso.

Per sostenere le centine, di solito, si dispone a circa 30 cm sotto il piano d'imposta un ponte di servizio costituito da ritti verticali in legno, distanziati l'uno dall'altro, lungo le pareti in una o più file intermedie, da travi correnti lungo i muri, che collegano le teste dei ritti, e infine da traversoni poggianti sui correnti.

Su questi ultimi, poi, vengono chiodate le tavole che servono a collegarli per dare un piano di passaggio e a sostenere i puntelli, distribuiti sotto ogni centina ad una distanza di circa un metro l'uno dall'altro.

Su ogni appoggio e sui singoli puntelli viene disposta una coppia di cunei atta a serrare le centine, portando il livello del manto all'altezza richiesta, e a consentire il graduale disarmo.

La posa in opera dei mattoni avviene disponendo corsi diversamente orientati, in modo da ottenere una buona immorsatura e migliorare il comportamento della struttura: i filari, inoltre, sono disposti normalmente all'armatura ed hanno i giunti sfalsati.

Il modo più ovvio per disporre i mattoni sull'armatura è quello di tenere i filari paralleli alle linee d'imposta; tuttavia, se la corda è notevole e la monta depressa, l'inconveniente è il bisogno di realizzare dei giunti in chiave paralleli e verticali, generando così, nella parte centrale, una bassa resistenza data dal contrasto a compressione dei filari, ma quasi unicamente dalla coesione della malta. Per ovviare al problema, si dispongono i filari con un'inclinazione di 45° rispetto ai lati della pianta, incominciando dai vertici e proseguendo simmetricamente da ciascuna delle quattro parti verso il centro.

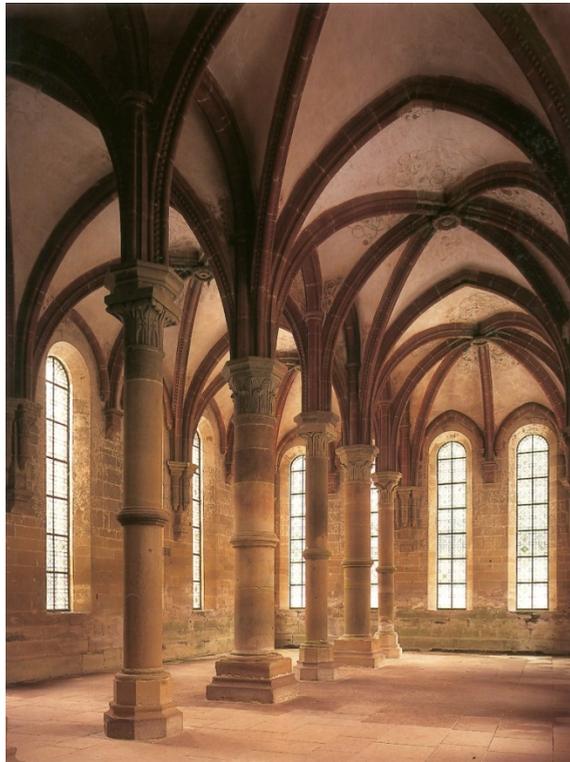


Fig. 060. Volta della Sala Capitolare della Abbazia di Maulbronn (Germania)

4.1. Le tipologie: comportamento strutturale

Come enunciato in precedenza, le strutture voltate possono essere semplici o composte; entrambe queste due categorie si distinguono per la loro forma in altrettante tipologie strutturali, quali:

- a) volte semplici:
 - a botte;
 - cupole;
 - a vela;
- b) volte composte:
 - a crociera;
 - a padiglione.

Esistono, poi, anche le varie sottocategorie delle precedenti volte esposte, a seconda della pianta, e altre tipologie di strutture voltate, come le volte in camorcanna: la geometria stessa delle volte si presenta più o meno complessa, nelle varie forme che esse possono assumere, e quella dello stesso guscio può presentarsi a singola o a doppia calotta, collegata da costoloni radiali, ecc. ...

Complessa lo è anche la composizione della struttura interna della relativa muratura, a seconda degli inerti di diversa densità o delle nervature interne in laterizio: pertanto, si può comprendere quanto sia articolato il problema dell'analisi statica di tali strutture.

4.1.1. La volta a botte

La volta a botte è uno dei sistemi più semplici e diffusi di copertura non piana, impiegata per coprire spazi più o meno ampi, di forma in genere rettangolare. Essa si può considerare generata dalla traslazione di un arco lungo una direttrice ad esso ortogonale: è una struttura bidimensionale che fa parte delle superfici coniche, cioè generata dalla rotazione di una retta, detta *generatrice*, intorno ad un'altra retta, definita *asse di rotazione*.

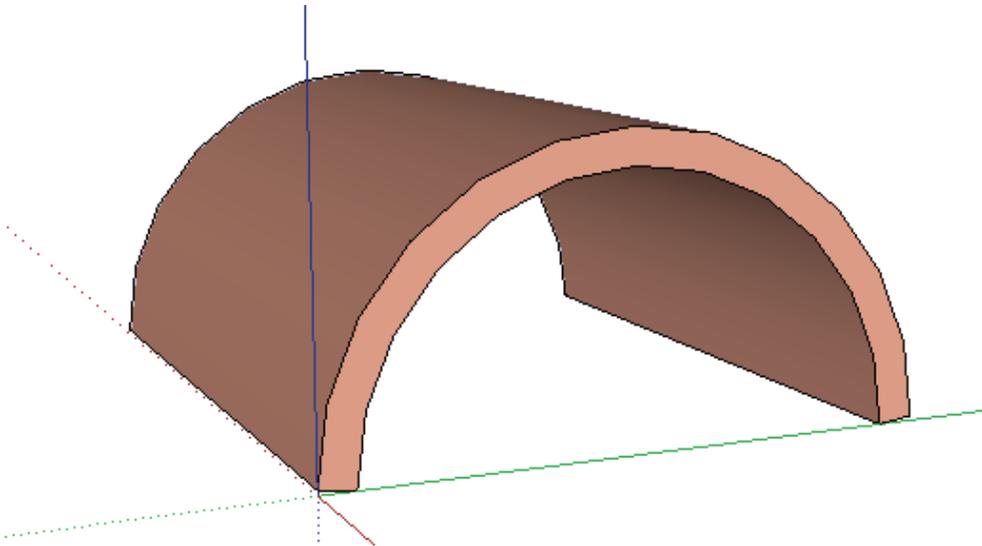


Fig. 061. Geometria della volta a botte